Analisi Matematica I - 12/02/19 - Tempo a disposizione: 3h
Matricola **Cognome e Nome**

A1. * Si consideri $f(x) = \dfrac{\sin x + \sqrt{x}}{x^3 + x(\ln x)^8 + 5}$, $x > 0$. Determinare $\beta \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \sim x^\beta$, per $x \to +\infty$.

Dire per quali $p \in \mathbb{R}$ l'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \big(f(x)\big)^p dx$ risulta convergente.

A2. * Calcolare il polinomio di Mac-Laurin di grado 6 per la funzione $f(x) = e^{4x^2} \ln(1 - x^3)$.

A3. Si determinino tutti gli $\alpha > 0$ tali che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan(n+1) \frac{(1 - \cos(\frac{1}{n^\alpha}))}{\sin(\frac{1}{n^2})}$ converga.

A4.* Calcolare il valore del limite $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{(e^{\sqrt[5]{7x}} - 1)^5 (\cosh \sqrt[6]{x} + \cos \sqrt[6]{x} - 2)^3}{\sinh\left(\frac{x^3}{2^3}\right)}$.

A5. Calcolare $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{n \sin(\frac{3}{n}) + n^3 e^{-2n}}{(n+1)\ln(1 + \frac{2}{n})}$.

A6. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{3x^2 + 2}\, dx$.

A7. Determinare il valore di $\mathrm{Re}\left[\dfrac{(z+2)^{-1} + 3z\bar{z}}{|z|}\right]$ quando $z = 2 + 2i$.

A8.* Determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea $y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 0$.

Determinare l'integrale generale dell'equazione non omogenea $y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = e^{2x}$.

A9. Si considerino le funzioni $f(x) = \arctan^2(x)$ e $g(x) = 2x^2 - 2x + 1$. Sia $h(x) = f(g(x))$. Calcolare $h'(0)$.

A10. Si consideri $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^{2\sin(x)}$. Determinare il massimo ed il minimo assoluti della f in $\mathbb{R}$.

B1. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continua in $[a,b]$, strettamente crescente. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\exists c \in (a,b)$ t.c. $f(c) = \dfrac{f(a)-f(b)}{2}$. $\boxed{\text{B}}$ $\exists c \in (a,b)$ t.c. $c = \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$. $\boxed{\text{C}}$ esiste un solo $c \in (a,b)$ t.c. $f(c) = \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$. $\boxed{\text{D}}$ non esiste $c \in (a,b)$ t.c. $f(c) = \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.

B2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \left|\sqrt[3]{x}\right|$. Allora f ha in $x = 0$ $\boxed{\text{A}}$ un punto angoloso. $\boxed{\text{B}}$ un punto di discontinuità. $\boxed{\text{C}}$ una cuspide. $\boxed{\text{D}}$ un punto critico.

B3. Siano a_n e b_n due successioni tali che $0 \le a_n \le b_n$ per ogni $n \ge 15$. $\boxed{\text{A}}$ Se $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge allora $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge. $\boxed{\text{B}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge se e solo se $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge. $\boxed{\text{C}}$ Se $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge allora $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge. $\boxed{\text{D}}$ Se $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge allora $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge.

B4.* Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile con $f'(x_o) = 0$ e f' strettamente crescente. Allora $\boxed{\text{A}}$ x_o è un punto di minimo assoluto. $\boxed{\text{B}}$ f non ha punti di estremo. $\boxed{\text{C}}$ x_o può non essere punto di estremo. $\boxed{\text{D}}$ x_o è un punto di massimo assoluto.

B5. Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, strettamente positive e continue in $[a,b]$, derivabili in (a,b) e t.c. $\dfrac{f(a)}{g(a)} = \dfrac{f(b)}{g(b)}$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\exists c \in (a,b)$ t.c. $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = 0$. $\boxed{\text{B}}$ $\exists c \in (a,b)$ t.c. $\dfrac{g'(c)}{f'(c)} = 0$. $\boxed{\text{C}}$ $\forall x \in (a,b)$ risulta $f'(x) = g'(x)$. $\boxed{\text{D}}$ $\exists c \in (a,b)$ t.c. $\dfrac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{[g(c)]^2} = 0$.

B6. Se $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 2$ allora $\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(-x) = -2$. $\boxed{\text{B}}$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(2x) = 4$. $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -g(2x) = -2$. $\boxed{\text{D}}$ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 2g(-x) = -4$.

B7. Sia $f : [1,4] \to \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\forall\, x \in [1,4]$ risulta $f(x) \ge f(4) + f'(4)(x-4)$. $\boxed{\text{B}}$ esiste un solo $x \in (1,4)$ t.c. $f(x) \ge f(4) + f'(4)(x-4)$. $\boxed{\text{C}}$ $\forall\, x \in [1,4]$ risulta $f(x) \le f(4) + f'(4)(x-4)$. $\boxed{\text{D}}$ $\forall\, x \in [1,4]$ risulta $f(x) \ge f(4) + f'(x)(x-4)$.

B8.* Sia $F : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ data da $F(x) = \displaystyle\int_0^x 2 + \cos(t^{1/2})\,dt$. Allora $\boxed{\text{A}}$ F è crescente. $\boxed{\text{B}}$ F non è continua. $\boxed{\text{C}}$ F non è derivabile. $\boxed{\text{D}}$ F è decrescente.

B9.* Siano a_n, b_n due successioni di numeri reali tali che $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n = \ell \in \mathbb{R}$ e $a_n \le b_n$ definitivamente. Allora $\boxed{\text{A}}$ se a_n è limitata inferiormente, allora a_n converge. $\boxed{\text{B}}$ a_n è limitata. $\boxed{\text{C}}$ a_n è limitata superiormente. $\boxed{\text{D}}$ a_n converge

B10.* Sia $f(x) \sim x^2$ per $x \to 0$ e sia $g(x) = f(x) + x$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $g(x) = o(x^2)$ per $x \to 0$. $\boxed{\text{B}}$ $g(x) = o(x)$ per $x \to 0$. $\boxed{\text{C}}$ $g(x) \sim x$ per $x \to 0$. $\boxed{\text{D}}$ $g(x) \sim x^2$ per $x \to 0$.

Soluzioni della prova del 12/02/19

Parte A

A1. Sia ha $f(x) \sim \dfrac{x^{1/2}}{x^3}$ quindi $\beta = -5/2$. La funzione $f^p(x) \sim x^{-5p/2}$ è intgrabile, in senso generalizzato, per $-5p/2 < -1$ e quindi $p > 2/5$

A2. Ricordando che $e^z = 1 + z + o(z)$ e che $\ln(1+t) \sim t - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$ per $z = 4x^2$ e $t = -x^3$ si ottiene il polinomio $p(x) = -x^3 - 4x^5 - \frac{1}{2}x^6$

A3. Ricordando che $\arctan(n+1) \to \pi/2$ e che $\cos(s) \sim 1 - \frac{1}{2}s^2$ per $s \to 0$ e che $\sin(z) \sim z$ per $z \to 0$ sostituendo si ottiene che la successione è asintotica a $\frac{\pi}{4}n^{2-2\alpha}$. Per il comportamento della serie armonica generalizzata si ottiene $2 - 2\alpha < -1$ e quindi $\alpha > 3/2$

A4. Ricordando che $e^z \sim 1+z$, $\sin(z) \sim z$, che $\cosh(z) \sim 1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4$ mentre $\cos(z) \sim 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4$ sostituendo i termini corrispondenti si ottiene $\dfrac{(7x)(x^2/12^3)}{x^3/2^3} \to 7/6^3$

A5. Ricordando che $\sin(z) \sim z$ per $z \to 0$ e $\ln(1+t) \sim t$ per $t \to 0$ per $x = 3/n$ e $t = 2/n$ si ottiene $3/2$

A6. Una primitiva è $\frac{1}{6}\ln(3x^2+2)$ quindi l'integrale è $\frac{1}{6}\ln(5/2)$

A7. Semplificando $\mathrm{Re}[...] = \dfrac{1}{|z|}\mathrm{Re}\left[\dfrac{1}{z+2}\right] + 3|z|$ e svolgendo i conti con $|z| = 2\sqrt{2}$ si ottiene $\sqrt{2}(\dfrac{1}{20}+6)$

A8. Trovando le radici del polinomio caratteristico si ottiene $y(x) = Ae^{-2x} + Bxe^{-2x}$ per $A, B \in \mathbb{R}$. Si cerca una soluzione particolare del tipo ce^{2x}, sostituendo nell'equazione si ottiene $c = 1/16$.

A9. Usando la formula di derivazione per le funzioni composte si ottiene $h'(0) = -2\arctan(1) = -\pi/2$.

A10. Essendo l'esponenziale una funzione monotona crescente i valori massimo e minimo corrispondono ai valori massimo e minimo di $2\sin(x)$, ossia 2 e -2. Quindi per f il massimo è e^2 mentre il minimo è e^{-2}.

Parte B

B1. $\boxed{\text{C}}$ esistenza dal teorema dei valori intermedi e unicitaà dalla monotonia

B2. $\boxed{\text{C}}$ dal grafico

B3. $\boxed{\text{C}}$ per il criterio del confronto

B4. $\boxed{\text{A}}$ perche' la derivata è negativa a sinistra e positiva a destra, quindi la funzione d̀ecrescente a sinistra e crescente a destra

B5. $\boxed{\text{D}}$ per il teorema di Lagrange o Rolle applicato alla funzione $h(x) = f(x)/g(x)$

B6. $\boxed{\text{C}}$

B7. $\boxed{\text{A}}$ $y = f(4) + f'(4)(x-4)$ è l'eq. della retta tangente in $(4, f(4))$. Dal grafico, la funzione f è maggiore della retta tangente.

B8. $\boxed{\text{A}}$ $F'(x) = 2 + \cos(x^{1/2})$ per il teorema fondamentale. Si ha $F' > 0$ e quindi F crescente.

B9. $\boxed{\text{C}}$ perche' b_n essendo convergente è limitata

B10. $\boxed{\text{C}}$ usando la definizione di asintoticità.