Analisi Matematica I - 24/01/19 - Tempo a disposizione: 3h
Matricola **Cognome e Nome**

A1. Calcolare il polinomio di Mac-Laurin di grado 2 per la funzione $F(x) = \int_0^x \sin(\ln(3t+1))\,dt$.

A2.* Stabilire per quali $\alpha > 0$ l'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x^{9\alpha})}{x^2e^{-x} + x\sin(x^2)}dx$ converge in senso generalizzato.

A3.* Calcolare il valore del limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos\left(\frac{2}{x}\right) + \ln\left(1+\frac{2^2}{2x^2}\right) - 1}{\tan\left(\frac{3}{x^4}\right)}$.

A4. Si consideri $f : [0, +\infty)\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = xe^{\frac{2}{x-1}}$. Determinare i punti di massimo e minimo locali della f in $[0, +\infty)\backslash\{1\}$.

A5. Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{4\cos(n+\pi) + n^{3/2}}{n\ln(2n+1) - n^2 + 1}$.

A6.* Scrivere l'integrale generale dell'equazione omogenea $y'(x) + \dfrac{2}{x}y(x) = 0$ nell'intervallo $(0, +\infty)$.

Determinare tutte le soluzioni dell'equazione non omogenea $y'(x) + \dfrac{2}{x}y(x) = \dfrac{x^{-2}}{1+(7x)^2}$ nell'intervallo $(0, +\infty)$.

A7. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^\pi x\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)dx$.

A8. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione definita da $f(x) = \cos(\ln^4(x))$ nel punto di ascissa $x_o = e$.

A9. Determinare il valore di $\mathrm{Im}\left[\dfrac{z+5}{z-3i} + \mathrm{Re}z + 3z\bar{z}\right]$ quando $z = 5i$.

A10.* Si consideri la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(2\frac{1-x}{x}\right)^n$. Determinare tutti gli $x \in \mathbb{R}$ per cui la serie converge. Per tali x calcolare la somma della serie (in funzione di x).

B1. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivabile. Sia x_o un punto critico per $g(x)=e^{f(x)}$. Allora $\boxed{\text{A}}$ x_o è un punto di flesso per g. $\boxed{\text{B}}$ x_o è un punto di minimo per f. $\boxed{\text{C}}$ x_o è un punto critico per f. $\boxed{\text{D}}$ x_o è un punto di massimo per f.

B2.* Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile in (a,b) e, dato $x_o\in(a,b)$, risulti $f'(x_o)=l>0$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\forall\, x\in(a,b)$ risulta $f'(x)>0$. $\boxed{\text{B}}$ $f(x_o+h)=f(x_o)+lh$ per ogni $h>0$. $\boxed{\text{C}}$ $f(x_o-h)=f(x_o)-lh+o(h)$ per $h\to 0$. $\boxed{\text{D}}$ $f(x_o-h)=f(x_o)-lh$ per ogni $h>0$.

B3. * Siano a_n, b_n due successioni reali tali che a_nb_n risulta infinitesima per $n\to+\infty$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $a_n=o(b_n)$ per $n\to+\infty$ $\boxed{\text{B}}$ b_n è infinitesima. $\boxed{\text{C}}$ a_n è infinitesima. $\boxed{\text{D}}$ $a_n=o(b_n^{-1})$ per $n\to+\infty$.

B4. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ crescente e sia $g(x)=f(ax+b)$ per $a,b\in\mathbb{R}$. $\boxed{\text{A}}$ Se $a>0$ allora g è crescente. $\boxed{\text{B}}$ Se $b>0$ allora g è crescente. $\boxed{\text{C}}$ Se $a<0$ allora g è crescente. $\boxed{\text{D}}$ Se $b<0$ allora g è crescente.

B5. Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, continua in $[a,b]$, tale $f(a)f(b)<0$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\exists[c,d]\subset(a,b)$ t.c. $\forall\, x\in[c,d]$ risulta $f(x)>0$. $\boxed{\text{B}}$ $\exists c\in(a,b)$ t.c. $f'(c)<0$. $\boxed{\text{C}}$ $\exists[c,d]\subset(a,b)$ t.c. $\forall\, x\in[c,d]$ risulta $f(x)=0$. $\boxed{\text{D}}$ $\exists c\in(a,b)$ t.c. $f'(c)>0$.

B6. Sia $f(x)=o(x^m)$ e $g(x)=o(x^n)$ per $x\to 0$, con $m,n>0$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $f(x)g(x)=o(x^{mn})$ per $x\to 0$. $\boxed{\text{B}}$ $f(x)g(x)=o(x^{n/m})$ per $x\to 0$. $\boxed{\text{C}}$ $f(x)g(x)=o(x^{m+n})$ per $x\to 0$. $\boxed{\text{D}}$ $f(x)g(x)=o(x^{m/n})$ per $x\to 0$.

B7. Sia $f:[2,4]\to\mathbb{R}$, continua in $[2,4]$, derivabile in $(2,4)$, t.c. $f(4)=3f(2)$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\exists c\in(2,4)$ t.c. $f'(c)>0$. $\boxed{\text{B}}$ $\exists c\in(2,4)$ t.c. $f'(c)=f(2)$. $\boxed{\text{C}}$ $\exists c\in(2,4)$ t.c. $f'(c)<0$. $\boxed{\text{D}}$ $\forall x\in(2,4)$ risulta $f'(x)>f(2)$.

B8.* Sia a_n una successione di numeri reali e $s_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$. Supponiamo che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ converga. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ potrebbe non esistere. $\boxed{\text{B}}$ $\lim\limits_{n\to+\infty}s_n$ esiste e vale $+\infty$ o $-\infty$. $\boxed{\text{C}}$ $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=l\neq 0$. $\boxed{\text{D}}$ $\lim\limits_{n\to+\infty}s_n$ esiste finito.

B9.* $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=+\infty$ se e solo se $\boxed{\text{A}}$ per ogni $k<0$ esiste $\delta>0$ tale che $f(x)<k$ per ogni $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$. $\boxed{\text{B}}$ per ogni $k>0$ esiste $\delta>0$ tale che $f(x)>k$ per ogni $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$. $\boxed{\text{C}}$ per ogni $k>0$ esiste $\delta>0$ tale che $f(x)>k$ per ogni $x\in(x_0-\delta,x_0)$. $\boxed{\text{D}}$ per ogni $k<0$ esiste $\delta>0$ tale che $f(x)>k$ per ogni $x\in(x_0-\delta,x_0)$.

B10. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da $f(x)=e^{\sin^2(x)}$. Allora $\boxed{\text{A}}$ f è pari. $\boxed{\text{B}}$ f è iniettiva. $\boxed{\text{C}}$ f è dispari. $\boxed{\text{D}}$ f è monotona.

Soluzioni della prova del 24/01/19

Parte A

A1. Si ha $F(0)$, $F'(x) = \sin(\ln(3x+1))$ (per il teorema fondamentale) e $F''(x) = 3\cos(\ln(3x+1))/(3x+1)$. Essendo $\ln(1) = 0$, il polinomio diventa $p(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{1}{2}F''(0)x^2 = \frac{3}{2}x^2$.

A2. Si ha $\ln(1+x^{9\alpha}) \sim x^{9\alpha}$, $x^2 e^{-x} \sim x^2$ mentre $x\sin(x^2) \sim x^3$ (per $x \to 0$). Quindi l'integrale si comporta come $\displaystyle\int_0^1 x^{9\alpha-2}\,dx$ che converge per $9\alpha - 2 > -1$, i.e., $\alpha > 1/9$.

A3. Sostituendo $2/x = t$ si trova $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{\cos(t) + \ln(1+\frac{1}{2}t^2) - 1}{\tan(\frac{3}{16}t^4)}$. Sapendo che $\tan(z) \sim z$ per $z \to 0$ il denominatore è asintotico a $\frac{3}{16}t^4$. Per il numeratore si ha invece

$$\cos(t) = 1 - \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{24}t^4 + o(t^5) \qquad \ln(1+z) = z - \tfrac{1}{2}z^2 + o(z^2) \text{ con } z = \tfrac{1}{2}t^2.$$

Quindi $\cos(t) + \ln(1+\frac{1}{2}t^2) - 1 = -\frac{1}{12}t^4 + o(t^4)$. Il resto è un conto algebrico. NB. È necessario espandere fino a t^4.

A4. Per studiare il segno della derivata prima $f'(x) = e^{\frac{2}{x-1}}\dfrac{(x-1)^2 - 2x}{(x-1)^2}$ è sufficiente considerare $(x-1)^2 - 2x \geq 0$. Un conto algebrico porta a dimostrare che i pti di minimo sono $x_0 = 0$ e $x_1 = 2+\sqrt{3}$ mentre il pto di massimo è $x_2 = 2-\sqrt{3}$.

A5. La successione è asintotica a $-n^{1/2}$ che ìnfinitesima.

A6. Le soluzioni dell'equazione omogenea sono $y(x) = Ce^{-2\ln x} = Cx^{-2}$ con $C \in \mathbb{R}$. Le soluzioni dell'equazione non omogenea sono invece $y(x) = Cx^{-2} + \frac{1}{7}x^{-2}\arctan(7x)$.

A7. Calcolando la derivata prima $f'(x) = -4\sin(\ln^4(x))\ln^3(x)/x$ si ottiene $y(x) = \cos(1) - 4e^{-1}\sin(1)(x-e)$.

A8. Usando la formula di integrazione per parti, per eliminare il fattore x, e svolgendo i conti si ottiene $-\pi\sqrt{2}/4$. È possibile anche fare prima la sostituzione $t = 2x + \frac{\pi}{4}$ e poi l'integrazione per parti.

A9. Si ha $\operatorname{Im}\left[\dfrac{z+5}{z-3i} + \operatorname{Re}z + 3z\bar{z}\right] = \operatorname{Im}\left[\dfrac{z+5}{z-3i}\right]$ e per $z = 5i$ si ottiene facilmente $\operatorname{Im}[...] = -5/2$.

A10. La serie, di tipo geometrico, converge per $\left|2\dfrac{1-x}{x}\right| < 1$. Risolvendo la disequazione si ottiene l'intervallo $(\frac{2}{3}, 2)$. La serie geometrica converge a $\dfrac{1}{1 - 2\frac{1-x}{x}}$.

Parte B

B1. $\boxed{\text{C}}$ perché $g'(x_0) = e^{f(x_0)} f'(x_0) = 0$.

B2. $\boxed{\text{C}}$ per la differenziabilità di f

B3. $\boxed{\text{D}}$ $a_n = o(b_n^{-1})$ equivale a $a_n/b_n^{-1} = a_n b_n \to 0$

B4. $\boxed{\text{A}}$ per composizione di funzioni crescenti

B5. $\boxed{\text{A}}$ per permanenza del segno esiste un intorno di a o di b in cui la funzione è positiva

B6. $\boxed{\text{C}}$ è sufficiente usare la definizione di o piccolo

B7. $\boxed{\text{B}}$ per il teorema di Lagrange

B8. $\boxed{\text{D}}$ per definizione di serie

B9. $\boxed{\text{C}}$ per definizione di limite

B10. $\boxed{\text{A}}$ $f(-x) = e^{\sin^2(-x)} = e^{\sin^2(x)} = f(x)$