Analisi Matematica I - 03/09/18 - Tempo a disposizione: 3h
Matricola **Cognome e Nome**

A1. Calcolare il valore di $A = \mathrm{Re}\left[\dfrac{z+4}{z+1} + 2\,\mathrm{Im}(z\bar{z})\right]$ dove $z = 3 + 2i$.

A2. Si consideri $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = (x-2)^2 + \arctan\left(\dfrac{2}{x}\right)$. Scrivere il Polinomio di Taylor di ordine 2 della f centrato in $x = 2$ nella forma $P_2(x; a) = a_o + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2$.

A3. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+2x^2)^{1/3} - 1}{\arctan(x^2)}$

A4.* Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) = 2xu(x) + \cos(x)e^{x^2} \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

A5. Sia $f(x) = \dfrac{1}{\ln(7x)} - 2$, calcolare l'equazione della retta tangente al suo grafico nel punto di ascissa $x_0 = \frac{1}{7}e$.

A6. Si calcoli $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^t}{1 + 2^2 e^{2t}}\, dt.$

A7. Sia $\alpha > 0$ un parametro reale. Determinare per quali valori di α converge la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{(\alpha^n + 1)(\alpha^n + 2)}$.

A8. Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \arctan(-n) \frac{\ln(1 + 2n^{-3})}{\sin(n^{-3})}$

A9.* Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{e^{\alpha x} \arctan(x+\pi)}{x^2+1}\, dx$ converge.

A10.* Sia $f : [0, \frac{3}{4}\pi] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = -2\sin^2(x)$. Determinare i punti di massimo e minimo (stabilendo se locale e globale) di f nel suo dominio.

B1. Si consideri la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ con $a_n > 0$. Se la serie converge, allora

$\boxed{\text{A}}$ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$. $\boxed{\text{B}}$ $a_{n+1} \leq a_n$ per ogni $n \geq 0$. $\boxed{\text{C}}$ $a_{n+1} < a_n$ per ogni $n \geq 0$. $\boxed{\text{D}}$ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

B2.* Sia a_n una successione di numeri reali tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 5$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\forall\varepsilon > 0\ \exists\bar{n} \in \mathbb{N}$: $|a_n - 5| > \varepsilon$ per ogni $n > \bar{n}$. $\boxed{\text{B}}$ $\exists\bar{n} \in \mathbb{N} : a_n \geq 5$ per ogni $n > \bar{n}$. $\boxed{\text{C}}$ $\exists\bar{n} \in \mathbb{N} : a_n > 1$ per ogni $n > \bar{n}$. $\boxed{\text{D}}$ $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

B3. Si consideri $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua, derivabile e convessa. Se in $c \in (a, b)$ risulta $f'(c) = 0$, allora $\boxed{\text{A}}$ $f''(c) < 0$. $\boxed{\text{B}}$ $f''(c) > 0$. $\boxed{\text{C}}$ c è un punto di minimo assoluto. $\boxed{\text{D}}$ c è un punto di massimo assoluto.

B4. * Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua con $f(a) > 0$ ed $f(b) < 0$. Allora $\boxed{\text{A}}$ esiste $c \in [a, b]$ tale che $\int_a^c f(x)\,dx < 0$. $\boxed{\text{B}}$ $\int_a^b f(x)\,dx < 0$. $\boxed{\text{C}}$ esiste $c \in (a, b)$ tale che $\int_c^b f(x)\,dx < 0$. $\boxed{\text{D}}$ $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

B5. Siano $z, w \in \mathbb{C}$. Allora $\overline{z + w} =$ $\boxed{\text{A}}$ $-\overline{z} - \overline{w}$. $\boxed{\text{B}}$ $\overline{z} + \overline{w}$. $\boxed{\text{C}}$ $\overline{z} - \overline{w}$. $\boxed{\text{D}}$ $-\overline{z} + \overline{w}$.

B6. Si consideri la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$. Allora la serie $\boxed{\text{A}}$ converge per il criterio del rapporto. $\boxed{\text{B}}$ converge per il criterio di Leibnitz. $\boxed{\text{C}}$ converge per il criterio di convergenza assoluta. $\boxed{\text{D}}$ diverge.

B7. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \pi a^x$ con $0 < a < 1$. Allora f è $\boxed{\text{A}}$ crescente. $\boxed{\text{B}}$ decrescente. $\boxed{\text{C}}$ periodica. $\boxed{\text{D}}$ limitata.

B8. * Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione crescente. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\lim_{x\to 0^+} (f(x) + g(x))$ esiste. $\boxed{\text{B}}$ $\lim_{x\to-\infty} (f(x) + g(x))$ non esiste. $\boxed{\text{C}}$ $\lim_{x\to+\infty} (f(x) + g(x))$ esiste. $\boxed{\text{D}}$ $\lim_{x\to 0}(f(x) + g(x))$ esiste.

B9. Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua e sia $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la funzione $g(x) = f(x^2)$. Sia $x_0 \in (0, 1)$, allora $\lim_{x\to x_0} g(x) =$ $\boxed{\text{A}}$ $f(x_0)$. $\boxed{\text{B}}$ $f^2(x_0)$. $\boxed{\text{C}}$ $f(x_0^2)$. $\boxed{\text{D}}$ $f(x_0^{1/2})$.

B10.* Si consideri $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) con $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Allora

$\boxed{\text{A}}$ $\exists c \in (a, b)$ tale che $[f(b) - f(a)]f'(c) = 0$. $\boxed{\text{B}}$ $\exists c \in (a, b)$ tale che $[f(b) - f(a)]f'(c) > 0$. $\boxed{\text{C}}$ $\forall\, c \in (a, b)$ risulta $f'(c) > 0$. $\boxed{\text{D}}$ $\exists c \in (a, b)$ tale che $[f(b) - f(a)]f'(c) < 0$.

Soluzioni della prova del 03/09/18

Parte A

A1. $z\bar{z}$ ĩreale e quindi $\mathrm{Im}(z\bar{z}) = 0$. Quindi, con passaggi algebrici standard, si ottiene $8/5$.

A2. I coefficienti sono $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$ con $x_0 = 2$. Quindi $p(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{17}{16}(x-2)^2$.

A3. Utilizzando le espansioni di $\arctan(t)$ e $(1+t)^{1/3}$ per $t \to 0$ oppure il Teorema di de l'Hopital si ottiene $2/3$.

A4. $u(x) = e^{x^2}(1 + \sin x)$.

A5. Si ha $f'(x) = -1/\ln^2(7x)$ e quindi (usando $\ln(e) = 1$) $y = -\frac{7}{e}x$.

A6. Con la sostituzione $t = 2e^t$ si ottiene $\frac{1}{2}(\arctan(2e^2) - \arctan(2e))$.

A7. Per $\alpha > 0$ si ha $(\alpha^n + 1)(\alpha^n + 2) > 1$ e quindi $0 < \dfrac{(\frac{1}{2})^2}{(\alpha^n + 1)(\alpha^n + 2)} \leq (\frac{1}{2})^n$. Quindi la serie data converge per ogni $\alpha > 0$ per il criterio del confronto.

A8. Si ha $\arctan(-n) \to -\frac{\pi}{2}$. Usando le espansioni di $\ln(1+t)$ e $\sin(t)$ per $t \to 0$ si ottiene $-\pi$.

A9. La funzione integranda è positiva e $f(x) \approx \frac{\pi}{2}\dfrac{e^{\alpha x}}{x^2}$ per $x \to +\infty$. Per $\alpha > 0$ si ha $f(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$ e quindi l'integrale diverge. Per $\alpha = 0$ si ha $f(x) \approx \frac{\pi}{2}\dfrac{1}{x^2}$ e quindi l'integrale converge per confronto asintotico. Per $\alpha < 0$ si ha $f(x) \leq \frac{\pi}{2}\dfrac{1}{x^2}$ e quindi l'integale converge per confronto.

A10. Studiando il segno della derivata $f'(x) = -4\sin(x)\cos(x)$ e osservando che $f(x) \leq 0$ (oppure tracciando un grafico qualitativo di f) si ottengono: $x_0 = 0$ punto di massimo globale, $x_1 = \pi/2$ punto di minimo globale e $x_2 = \frac{3}{4}\pi$ massimo locale.

Parte B

B1. $\boxed{\text{D}}$ Per condizione necessaria di convergenza della serie.

B2. $\boxed{\text{C}}$ Se $a_n \to 5$ allora $a_n > 1$ definitivamente.

B3. $\boxed{\text{C}}$ Perchè è un punto critico di una funzione convessa.

B4. $\boxed{\text{C}}$ Per continuità $f < 0$ in un intorno di b e quindi l'integrale è negativo.

B5. $\boxed{\text{B}}$

B6. $\boxed{\text{B}}$

B7. $\boxed{\text{B}}$

B8. $\boxed{\text{A}}$ Il limite destro di f esiste per continuità e quello di g per monotonia.

B9. $\boxed{\text{C}}$ g è una funzione continua.

B10. $\boxed{\text{B}}$ Dal Teorema di Lagrange perchè $[f(b) - f(a)] > 0$.