Analisi Matematica I - 30/01/18 - Tempo a disposizione: 3h
Matricola **Cognome e Nome**

A1. Siano $z = 3 + i$, $\xi = 1 - 2i$ e $w = 1 + i$. Si calcoli la parte reale di $\dfrac{z + \xi}{w}$.

A2. Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{4\ln(2n)}{6n + (-1)^n} + \frac{6e^{4n} + 4e^{-6n}}{4n^6 + e^{3n}} \right)$.

A3*. Determinare per quali valori del parametro $a > 0$ esiste $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x(3 + a\cos x)$.

A4*. Si consideri l'equazione differenziale $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = x - 1/2$.
Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata.

Determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa.

A5*. Calcolare il valore dell'integrale definito $\displaystyle\int_0^2 \ln\left(1 + \frac{2}{x+2}\right) dx$.

A6*. Si consideri la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \ln(1 + n^{-\alpha})$. Determinare tutti i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la serie converge.

A7. Stabilire se l'integrale $\displaystyle\int_9^{+\infty} \frac{\ln(x^5 + 1) + 2x^3 + 1}{x^5 \arctan(x^3) - 2\sin(5x)}\, dx$ converge o diverge.

A8. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x^3} - 1}{\sin x - x}$.

A9. Si consideri $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 2\pi \dfrac{\cos(2x^2)}{1 + x^2} + 2\sin(2\pi x) + 6\pi$. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(0, f(0))$.

A10. Determinare gli eventuali punti di massimo e/o minimo locali per la funzione $f : \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \arctan(x)$.

B1. Sia a_n una successione strettamente monotona, infinitesima e tale che $a_{43} < 0$. Allora $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}$
$\boxed{A}$ vale 0. $\boxed{B}$ vale $-\infty$. $\boxed{C}$ non esiste. $\boxed{D}$ vale $+\infty$.

B2.* Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua. Allora $\boxed{A}$ esiste $c \in [0,1]$ tale che $f(c) \leq f(x)$ per ogni $x \in [0,1]$. $\boxed{B}$ esiste $c \in [0,1]$ tale che $f(c) = 0$. $\boxed{C}$ esiste $c \in (0,1)$ tale che $f'(c) = f(1) - f(0)$. $\boxed{D}$ esiste $c \in [0,1]$ tale che $f(c) > f(x)$ per ogni $x \in [0,1] \setminus \{c\}$.

B3. Sia $f \in C^2((-2,2))$, strettamente convessa. Allora $\boxed{A}$ f è inferiormente limitata. $\boxed{B}$ necessariamente $\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$. $\boxed{C}$ $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$. $\boxed{D}$ f è superiormente limitata.

B4. * Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Fissato $a \in \mathbb{R}$ si definisca $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante la formula $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Se $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una primitiva di f, allora $\boxed{A}$ $G(x) - G(a) = f(x) - f(a)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. $\boxed{B}$ $G'(x) = F'(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. $\boxed{C}$ $G(x) = F(x) - F(a)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. $\boxed{D}$ $G(x) = F(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

B5.* Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(t) = \max\{t, 0\} = [t]_+$. Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Allora in tutto $\mathbb{R}$ la funzione F è $\boxed{A}$ limitata. $\boxed{B}$ concava. $\boxed{C}$ di classe C^∞. $\boxed{D}$ convessa.

B6. Siano a_n e b_n successioni reali tali che $0 \leq a_n \leq c\, b_n$ per $c > 0$. $\boxed{A}$ Se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge allora $\sum_{n=4}^{+\infty} a_n$ converge. $\boxed{B}$ Se $\sum_{n=3}^{+\infty} b_n$ diverge allora $\sum_{n=2}^{+\infty} a_n$ diverge. $\boxed{C}$ Se $\sum_{n=4}^{+\infty} b_n$ diverge allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge. $\boxed{D}$ Se $\sum_{n=5}^{+\infty} a_n$ diverge allora $\sum_{n=3}^{+\infty} b_n$ converge.

B7. Sia $f : (0,2) \to \mathbb{R}$ monotona e limitata. Allora $\boxed{A}$ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. $\boxed{B}$ $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ esiste finito. $\boxed{C}$ $\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$. $\boxed{D}$ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

B8. Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile e sia $x \in (a,b)$. Allora $\boxed{A}$ $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. $\boxed{B}$ $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(x+h)}{h}$. $\boxed{C}$ $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(h)}{h}$. $\boxed{D}$ $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + f(x)}{h}$.

B9.* Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e periodica. Allora f è $\boxed{A}$ limitata. $\boxed{B}$ monotona. $\boxed{C}$ derivabile. $\boxed{D}$ invertibile.

B10. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strettamente crescente. Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = e^{-f(x)}$. Allora $\boxed{A}$ g è strettamente crescente. $\boxed{B}$ g è continua. $\boxed{C}$ g è iniettiva. $\boxed{D}$ esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $g(x_0) = 0$.

Soluzioni della prova del 30/01/18

Parte A

A1. 3/2.

A2. Il primo termine è infinitesimo perché $\ln(n)/n \to 0$. Il secondo è asintotico a $6e^n$. Dunque il limite è $+\infty$.

A3. Per $a < 3$ il temine $(3 + a\cos x)$ è sempre positivo e il limite è $+\infty$.

A4. Omogenea: $y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^x$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Non-omogenea: $y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^x + \frac{1}{2}(x+1)$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

A5. Integrando per parti si ottiene $6\ln 3 - 8\ln 2$. Equivalentemente, si può cercare una primitiva a partire da $x\ln(1+\frac{2}{x+2})$. Oppure, si può riscrivere la funzione integranda come $\ln(1+\frac{2}{x+2}) = \ln(\frac{x+4}{x+2}) = \ln(x+4) - \ln(x+2)$ e poi integrare.

A6. Se $\alpha > 0$ si può scrivere $\ln(1+n^{-\alpha}) \sim n^{-\alpha}$ quindi la serie converge per $\alpha > 3$. Per $\alpha \leq 0$ si ha $n^2\ln(1+n^{-\alpha}) \geq n^2$ definitivamente e quindi la serie diverge.

A7. La funzione integranda è asintotica a x^{-2}. L'integrale converge.

A8. Usando le espansioni di Taylor si ottiene che il limite è -12.

A9. $y = 4\pi x + 8\pi$.

A10. Studiando la derivata prima si ottiene che l'unico punto critico $x_c = 0$ è un minimo locale.

Parte B

B1. B

B2. A

B3. A

B4. B

B5. D

B6. A

B7. B

B8. A

B9. A

B10. C