Analisi Matematica I - 20/07/16 - Tempo a disposizione: 3h
Matricola **Cognome e Nome**

A1. Stabilire se la seguente serie converge o diverge $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\ln(2n)}+2\sin(n^{-1})\right)$

A2. Calcolare il seguente limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4+5\arctan(x^9)+\cos(\ln(x^4))}{\ln(3x^4)+(x-3)^4}$.

A3.* Scrivere l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$4\,u''(x)-20\,u'(x)+25\,u(x)=0.$$

Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases}4\,u''(x)-20\,u'(x)+25\,u(x)=0,\\ u(0)=0,\\ u'(0)=-2.\end{cases}$$

A4.* Stabilire se esistono il massimo assoluto e il minimo assoluto della funzione $f(x)=\dfrac{2x+5}{(x+1)^2}$ e, in caso affermativo, determinarli.

A5.* Calcolare il seguente limite: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{-2n^6\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)+10}{5n^4+3n-4e^{-n}}$.

A6. * Calcolare la retta tangente al grafico della funzione $F(x)=1+\displaystyle\int_\pi^x\cos^3(t)\,dt$ nel punto di ascissa π.

A7. Sia $w=\rho e^{i\theta}$ con $\rho=\sqrt{3}$ e $\theta=\frac{3}{4}\pi$. Calcolare $\dfrac{5w-\bar{w}}{w}$.

A8.* Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int(e^{-8x}-3xe^{-x^2})\,dx$.

Calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty}(e^{-8x}-3xe^{-x^2})\,dx$.

A9. Sia $f(x)=2\sin x+3x$ e sia f^{-1} la sua inversa. Calcolare la derivata di f^{-1} in 3π.

A10. Calcolare il polinomio di MacLaurin di ordine 4 della funzione $f(x)=2e^{x^2}+4\cos(x^2)$.

B1.* Siano (a_n) e (b_n) due successioni tali che $a_n \leq b_n$ per ogni n. Si ha che $\boxed{\text{A}}$ se (b_n) diverge, allora (a_n) diverge $\boxed{\text{B}}$ se (b_n) converge e $a_n \geq 0$ per ogni n, allora (a_n) è limitata $\boxed{\text{C}}$ se (b_n) converge e $a_n \geq 0$ per ogni n, allora (a_n) converge $\boxed{\text{D}}$ se $b_n \to 0$, allora $a_n \to 0$.

B2. Sia u la soluzione dell'equazione differenziale $u'(t) = \lambda u(t)$ per $t \in [0, +\infty)$ con condizione iniziale $u(0) = c$. Se $\lambda > 0$ e $c < 0$ allora la funzione u è $\boxed{\text{A}}$ crescente e positiva $\boxed{\text{B}}$ decrescente e positiva $\boxed{\text{C}}$ crescente e negativa $\boxed{\text{D}}$ decrescente e negativa.

B3.* Se $f(x) = o(x^3)$ e $g(x) = o(x^2)$ per $x \to 0$, allora si ha che per $x \to 0$ $\boxed{\text{A}}$ $f(x)+g(x) = o(x^6)$ $\boxed{\text{B}}$ $f(x) + g(x) = o(x^2)$ $\boxed{\text{C}}$ $f(x) + g(x) = o(x^5)$ $\boxed{\text{D}}$ $f(x) + g(x) = o(x^3)$.

B4. * Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora esiste $x_c \in [a, b]$ tale che $\boxed{\text{A}}$ $f(b) > f(x_c)$ $\boxed{\text{B}}$ $f(x_c) \leq f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$ $\boxed{\text{C}}$ $f(a) < f(x_c)$ $\boxed{\text{D}}$ $f(a) < f(x_c) < f(b)$.

B5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$ con $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\ell \in \mathbb{R}$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : |f(x) - \ell| < \varepsilon\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $\boxed{\text{B}}$ $f(x_0) = \ell$ $\boxed{\text{C}}$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ |f(x) - \ell| < \varepsilon\ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ $\boxed{\text{D}}$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : |f(x) - \ell| < \varepsilon\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$.

B6. Sia a_n una successione a termini positivi tale per cui la serie $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ converga. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sqrt{a_n}$ converge $\boxed{\text{B}}$ $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n^2$ converge $\boxed{\text{C}}$ $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n^2$ diverge $\boxed{\text{D}}$ $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n^2$ è indeterminata (oscilla).

B7. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotona crescente. Sia $g(x) := f(\sin(x))$. Allora g è
$\boxed{\text{A}}$ monotona decrescente in $(0, \pi)$ $\boxed{\text{B}}$ monotona crescente in $(-\pi/2, \pi/2)$ $\boxed{\text{C}}$ monotona decrescente in $(-\pi/2, \pi/2)$ $\boxed{\text{D}}$ monotona crescente in $(0, \pi)$.

B8. Sia $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[0, 2]$ e derivabile in $(0, 2)$. Allora $\boxed{\text{A}}$ esiste $x_0 \in (0, 2)$ tale che $f'(x_0) = f(2) - f(0)$ $\boxed{\text{B}}$ esiste $x_0 \in (0, 2)$ tale che $f'(x_0) = 0$ $\boxed{\text{C}}$ esiste $x_0 \in (0, 2)$ tale che $\frac{1}{2} f'(x_0) = f(2) - f(0)$ $\boxed{\text{D}}$ esiste $x_0 \in (0, 2)$ tale che $2f'(x_0) = f(2) - f(0)$.

B9.* Sia $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $g(x) = -1$ se $x \in [0, 2[$, $g(x) = 2$ se $x \geq 2$. Sia $F(x) := 6 + \int_0^x g(t)\, dt$. In $x = 2$ la funzione F $\boxed{\text{A}}$ è continua e derivabile $\boxed{\text{B}}$ è continua, ma non derivabile $\boxed{\text{C}}$ non è né continua né derivabile $\boxed{\text{D}}$ è derivabile, ma non continua.

B10. Sia $f(x) = x^2 |\sin x|$. Allora f è $\boxed{\text{A}}$ limitata $\boxed{\text{B}}$ dispari $\boxed{\text{C}}$ periodica $\boxed{\text{D}}$ pari.

Soluzioni

A1. La serie
$$\sum \frac{(-1)^n}{\ln(2n)}$$
converge per il criterio di Leibniz, mentre la serie
$$\sum 2\sin(n^{-1})$$
diverge, perché ha lo stesso comportamento di $\sum 2n^{-1}$. Pertanto la serie $\sum \Big(\frac{(-1)^n}{\ln(2n)} + 2\sin(n^{-1})\Big)$ diverge.

A2. $\frac{3x^4 + 5\arctan(x^9) + \cos(\ln(x^4))}{\ln(3x^4) + (x-3)^4} \simeq \frac{3x^4}{(x-3)^4}$, per $x \to +\infty$. Pertanto, il limite è 3.

A3. l'integrale generale è $u(x) = c_1 e^{\frac{5}{2}x} + c_2 x e^{\frac{5}{2}x}$.
La soluzione del problema di Cauchy è $u(x) = -2xe^{\frac{5}{2}x}$

A4. Si noti che f è definita per $x \neq -1$. Poiché $\lim_{x\to -1} f(x) = +\infty$, la funzione non ha massimo. Dallo studio della derivata si deduce che esiste il minimo assoluto ed è assunto in $x = -4$.

A5. Si ha che $\ln(1 + \frac{2}{n^2}) \simeq \frac{2}{n^2}$ per $n \to \infty$. Pertanto il limite è $-\frac{4}{5}$

A6. $y = -(x - \pi) + 1$

A7. $5 - i$

A8. L'integrale indefinito è $-\frac{1}{8}e^{-8x} + \frac{3}{2}e^{-x^2} + c$, da cui segue che
$$\int_0^{+\infty} (e^{-8x} - 3xe^{-x^2})\,dx = -\frac{11}{8}$$

A9. 1

A10. $P_4(x) = 6 + 2x^2 - x^4$

B1. B

B2. D

B3. B

B4. B

B5. C

B6. B

B7. B

B8. D

B9. B

B10. D