Analisi Matematica I - 16/06/16 - Tempo a disposizione: 3h
Matricola **Cognome e Nome**

A1.* Determinare i punti di massimo e di minimo assoluto della funzione $f(x) = e^{-2x}(x^2 + 2x - 5)$ nell'intervallo $[-4, 0]$.

A2. Calcolare l'integrale indefinito $\int \left(\frac{\sqrt{2}x}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+1} \right) dx$

A3.* Calcolare il seguente limite: $\lim_{n \to +\infty} \frac{(n+4)! + (1 - \sin n) n^2}{3(n+1)^4\, n! - n^5}$.

A4. Sia $f(x) = 3x \log(4x)$. Calcolarne i polinomi di Taylor di grado uno e due con centro $x_0 = 1/2$.

A5.* Sia $F(x) = \int_{\pi/3}^{x} \cos^3(t)\, dt$. Calcolare: $\lim_{x \to \pi/3} \frac{F(x)}{x - \pi/3}$

A6. Calcolare: $\lim_{x \to 0} \frac{6 \log(x+1) + 2(e^{3x^2} - 1) - 6x}{x^2}$

A7. Stabilire se la seguente serie converge o diverge $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^{1/2} \arctan(2n) + n^4}{n^{1/3} + (n^3+3)^2}$

A8.* Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''(x) - 6y'(x) + 34y(x) = 0.$$

Calcolare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - 6y'(x) + 34y(x) = 0, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

A9. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} 3\cos x - 4x & \text{se } x < \pi/4 \\ a \sin x & \text{se } x \geq \pi/4. \end{cases}$

Determinare il parametro $a \in \mathbb{R}$ in modo tale che la funzione f sia continua in $\mathbb{R}$.

A10. Trovare in $\mathbb{C}$ le soluzioni dell'equazione $(z + 5i)(z^4 + 5) = 0$

B1.* Sia $F:(0,\pi/2)\to\mathbb{R}$ definita da $F(x)=\displaystyle\int_0^x \log(\cos(t))\,dt$. Allora $\boxed{\text{A}}$ F ha minimo $\boxed{\text{B}}$ F è monotona crescente $\boxed{\text{C}}$ F ha massimo $\boxed{\text{D}}$ F è monotona decrescente.

B2. Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua. Allora $\boxed{\text{A}}$ esiste un unico punto di massimo in $[a,b]$ $\boxed{\text{B}}$ esiste un punto di massimo in (a,b) $\boxed{\text{C}}$ esiste un punto critico in (a,b) $\boxed{\text{D}}$ esiste un punto di massimo in $[a,b]$.

B3. Sia $f\in C^2(0,1)$ tale che $f'(x)>0$ e $f''(x)\le 0\;\forall\, x\in(0,1)$. Allora $\boxed{\text{A}}$ f è convessa e crescente $\boxed{\text{B}}$ f è convessa e decrescente $\boxed{\text{C}}$ f è concava e crescente $\boxed{\text{D}}$ f è concava e decrescente.

B4. Se $f(x)=o(x)$ per $x\to 0$, allora $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sin x}$ $\boxed{\text{A}}$ è uguale a 1 $\boxed{\text{B}}$ è uguale a $+\infty$ $\boxed{\text{C}}$ è uguale a 0 $\boxed{\text{D}}$ non esiste.

B5. Sia data la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}+7}$. $\boxed{\text{A}}$ La serie converge assolutamente $\boxed{\text{B}}$ La serie converge $\boxed{\text{C}}$ La serie è indeterminata (oscilla) $\boxed{\text{D}}$ La serie diverge.

B6. * Sia $u:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ continua, derivabile e tale che $u(0)=a$ e $u'(x)\ge b$ per ogni $x>0$. Allora per ogni $x\in[0,+\infty)$ si ha $\boxed{\text{A}}$ $u(x)=a+bx$ $\boxed{\text{B}}$ $u(x)\le a+bx$ $\boxed{\text{C}}$ $u(x)<a+bx$ $\boxed{\text{D}}$ $u(x)\ge a+bx$.

B7. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che $f(\frac{1}{2})=f(0)+2$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\exists x_0\in(0,\frac{1}{2})$ tale che $f'(x_0)=0$ $\boxed{\text{B}}$ $\exists x_0\in(0,\frac{1}{2})$ tale che $f'(x_0)=4$ $\boxed{\text{C}}$ $\exists x_0\in(0,\frac{1}{2})$ tale che $f'(x_0)=1$ $\boxed{\text{D}}$ $\exists x_0\in(0,\frac{1}{2})$ tale che $f'(x_0)=2$.

B8. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione invertibile e sia g la sua inversa. Allora per ogni $x\in\mathbb{R}$ $\boxed{\text{A}}$ $g(x)f(x)=1$ $\boxed{\text{B}}$ $g(f(x))=x$ $\boxed{\text{C}}$ $g(f(x))=1$ $\boxed{\text{D}}$ $g(x)+f(x)=x$.

B9.* Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, tale che $\displaystyle\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)$. $\boxed{\text{A}}$ $\forall\varepsilon>0\;\exists\,\delta>0$ tale che $|f(x)-f(2)|<\varepsilon$ $\boxed{\text{B}}$ $\forall\,\varepsilon>0$ si ha $|x-2|<\varepsilon$ $\boxed{\text{C}}$ $\forall\varepsilon<0\;\exists\,\delta>0$ tale che $|x-2|<\varepsilon$ $\boxed{\text{D}}$ $\exists\,\delta>0$ tale che $|f(x)-f(2)|<1$ per ogni x tale che $|x-2|<\delta$.

B10.* Sia (a_n) una successione tale che $a_n>a_{n+1}$ e $a_n\ge 0$ per ogni n. Allora $\boxed{\text{A}}$ a_n è infinitesima $\boxed{\text{B}}$ esiste finito $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ $\boxed{\text{C}}$ a_n è divergente $\boxed{\text{D}}$ $a_n\le 1$ definitivamente.

Soluzioni

A1. punto di massimo assoluto $x = -4$, punto di minimo assoluto $x = -3$

A2. $\frac{\sqrt{2}}{2}\log(x^2+1) + 2\arctan x + c$

A3. il numeratore si comporta come $(n+4)!$ e il denominatore come $3(n+1)^4 n!$
Poiché $(n+4)! = (n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n!$, il limite è uguale a $\frac{1}{3}$

A4. $P_1(x) = \frac{3}{2}\log 2 + (3\log 2 + 3)\big(x - \frac{1}{2}\big)$

$P_2(x) = \frac{3}{2}\log 2 + (3\log 2 + 3)\big(x - \frac{1}{2}\big) + 3\big(x - \frac{1}{2}\big)^2$

A5. $\frac{F(x)}{x-\pi/3}$ è il rapporto incrementale di F nei punti x e $\pi/3$. Pertanto il limite vale $F'(\pi/3) = \cos^3(\pi/3) = 1/8$

A6. si sviluppa il termine logaritmico come $6\log(x+1) = 6x - 3x^2 + o(x^2)$. Il limite è 3.

A7. il termine generale si comporta come $1/n^2$, quindi la serie converge

A8. l'integrale generale è $y(x) = c_1 e^{3x}\sin(5x) + c_2 e^{3x}\cos(5x)$.

La soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = -\frac{6}{5}e^{3x}\sin(5x) + 2e^{3x}\cos(5x)$

A9. $a = 3 - \sqrt{2}\pi$

A10. $z = -5i$, $z = \sqrt[4]{5}e^{i\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}}$ per $k = 0, 1, 2, 3$

B1. D

B2. D

B3. C

B4. C

B5. B

B6. D

B7. B

B8. B

B9. D

B10. B