**Analisi Matematica I - 13/07/15 - Tempo a disposizione: 3h**
**Cognome e Nome - Firma**

**A1.**$^\star$ Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + b\sin(x) + c & x < 0 \\ 3^x - 4 & x \geq 0 \end{cases}$$

Stabilire per quali valori dei parametri $b, c \in \mathbb{R}$ la funzione $f$ è di classe $C^0$ e di classe $C^1$ in $\mathbb{R}$.

**A2.** Trovare le soluzioni dell'equazione $z^3 = -5$ in $\mathbb{C}$ (scrivere le soluzioni in forma esponenziale).

**A3.**$^\star$ Sia $F(s) = \displaystyle\int_s^{1/2} \frac{6\sin(t^6)}{1-\cos(t^\alpha)}\,dt$. Stabilire per quali $\alpha > 0$ esiste finito il $\displaystyle\lim_{s\to 0^+} F(s)$ .

**A4.** Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n^2)}{4+n^2} + 2\arctan(n^2)(2+e^{-1/n^2})$

**A5.** Si calcoli $\displaystyle\pi\int_0^{\ln 2} e^{3x}\sin(\pi e^{3x})\,dx$

**A6.** Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) + \sin(x)u(x) = 0 \\ u(0) = 4e. \end{cases}$$

**A7.**$^\star$ Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = (x+3)^{\cos(x)}$. Calcolare la retta tangente al grafico (a destra) in $x_0 = 0$.

**A8.** Sia $f : [3, 5] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 2(x-4)^2e^x$. Determinare i punti di massimo e minimo (relativi e assoluti) nell'intervallo $[3, 5]$.

**A9.**$^\star$ Sia $a_n = \sin(1/n) - \dfrac{e^{1/n}}{n+1}$. Stabilire per quale $k \in \mathbb{N}$ si ha $a_n \sim n^k$ per $n \to +\infty$. Dedurre se la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, diverge o oscilla.

**A10.** Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to-\pi^+} \tan(x/2)(\pi - x) + \cos^2(x/2)(\pi-x)^2 - \sin^3(x/2)(\pi-x)^3$

**B1.** Si consideri la serie convergente $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\lim_{n\to+\infty} a_n^2 = S^2$ $\boxed{\text{B}}$ $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ $\boxed{\text{C}}$ $\lim_{n\to+\infty} a_n^2 = 0$ $\boxed{\text{D}}$ $\lim_{n\to+\infty} a_n = S$.

**B2.**$^\star$ Si consideri una funzione $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ continua e t.c. $|f(x)| \leq x^{-\frac{3}{2}}$ per ogni $x \geq 3$. Allora l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ $\boxed{\text{A}}$ oscilla $\boxed{\text{B}}$ diverge a $-\infty$ $\boxed{\text{C}}$ diverge a $+\infty$ $\boxed{\text{D}}$ converge.

**B3.** Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a,b)$ un suo punto di minimo relativo. $\boxed{\text{A}}$ Se $f \in C^1(a,b)$ allora $f'(x_0) = 0$ $\boxed{\text{B}}$ Se $f \in C^2(a,b)$ allora $f''(x_0) > 0$ $\boxed{\text{C}}$ Se $f \in C^0(a,b)$ allora $f'(x_0) = 0$ $\boxed{\text{D}}$ Se $f \in C^1(a,b)$ allora $f''(x_0) > 0$.

**B4.** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e sia $f(3) = 10$, $f(10) = -3$. Allora $\boxed{\text{A}}$ esiste un unico $c \in \mathbb{R}$ t.c. $f(c) = 0$ $\boxed{\text{B}}$ esiste $c \in \mathbb{R}$ t.c. $f(c) > 10$ $\boxed{\text{C}}$ esiste $c \in \mathbb{R}$ t.c. $f(c) < -3$ $\boxed{\text{D}}$ esiste $c \in \mathbb{R}$ t.c. $f(c) = 0$.

**B5.**$^\star$ Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(2) \leq f(x) \leq f(5)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora la funzione $g(x) = e^{f(x)}$ $\boxed{\text{A}}$ ha un flesso in $x = 2$ e in $x = 5$ $\boxed{\text{B}}$ è strettamente crescente $\boxed{\text{C}}$ verifica $g(2) \leq g(x) \leq g(5)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{D}}$ verifica $g(5) \leq g(x) \leq g(2)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

**B6.**$^\star$ Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Fissato $a \in \mathbb{R}$, si considerino $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ e $G(x) = F(x) + 1$. Allora, considerato $b \in \mathbb{R}$, $\int_a^b f(x)\,dx =$ $\boxed{\text{A}}$ $F(b) - F(a) + 1$ $\boxed{\text{B}}$ $F(b) - F(a) - 1$ $\boxed{\text{C}}$ $G(b) - G(a)$ $\boxed{\text{D}}$ $G(b) - F(a)$.

**B7.** Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente monotona. Allora $f$ $\boxed{\text{A}}$ è derivabile con $f' < 0$ $\boxed{\text{B}}$ è invertibile $\boxed{\text{C}}$ oscilla $\boxed{\text{D}}$ è derivabile con $f' > 0$.

**B8.**$^\star$ Si considerino le successioni $a_n, b_n > 0$. Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ convergente e $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n - b_n$ converge $\boxed{\text{B}}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n}$ converge $\boxed{\text{C}}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n + b_n$ converge $\boxed{\text{D}}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ converge.

**B9.** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile nel punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\lim_{x\to h} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(h)$ $\boxed{\text{B}}$ $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ $\boxed{\text{C}}$ $\lim_{x\to x_0+h} \frac{f(x + x_0) - f(x + h)}{x_0 + h} = f'(x_0)$ $\boxed{\text{D}}$ $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ .

**B10.** Sia $a_n$ una successione monotona decrescente. Allora $\lim_{n\to+\infty} a_n$ $\boxed{\text{A}}$ esiste $\boxed{\text{B}}$ non esiste $\boxed{\text{C}}$ esiste e vale $-\infty$ $\boxed{\text{D}}$ esiste finito.

## Soluzioni della prova del 13/07/15

### Parte A

**A1.** per ogni $b$ e $c = -3$ / $b = \ln 3$ e $c = -3$

**A2.** $w = \rho e^{i\theta_k}$ per $\rho = \sqrt[3]{5}$ e $\theta_k = \pi/3 + 2k\pi/3$ con $k = 0, 1, 2$

**A3.** $\alpha < 7/2$

**A4.** $3\pi$

**A5.** $-2/3$

**A6.** $u(x) = 4e^{\cos(x)}$

**A7.** $y = x + 3$

**A8.** minimo assoluto in $x_1 = 4$, massimo relativo in $x_0 = 3$, massimo assoluto in $x_2 = 5$

**A9.** $k = -3$ / convergente

**A10.** $-\infty$

---

### Parte B

**B1.** C

**B2.** D

**B3.** A

**B4.** D

**B5.** C

**B6.** C

**B7.** B

**B8.** D

**B9.** D

**B10.** A