Analisi 1 - 21-01-2014 **Parte A**	**Cognome Nome - Firma**

1. (*) Sia u la soluzione del problema di Cauchy

$$u''(t) - 3u'(t) - 4u(t) = 0, \qquad u(0) = 0, \qquad u'(0) = 5.$$

Allora $\lim_{t\to+\infty} u(t)\, e^{-4t}$ vale

2. Sia $f(x) = e^{g(x)}$ dove $g(x) = x\arctan(2x)$. Allora $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(f'(x))}{g(x)}$ vale

3. Stabilire se i seguenti integrali convergono o divergono

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2}\, dx, \qquad \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1+4x)}{2x\sin(x)}\, dx.$$

4. Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{x\sin(3\,x^3)}{e^{-3x}(\cos(x)-1)^2} + \frac{3\,x^3 - x^5}{x^5 + 3x^2} - 3\left(\ln(1+3x) - e^x\right) \right)$$

5. Sia u la soluzione del problema di Cauchy

$$u'(x) - 2(x-1)u(x) = 2(1-x), \qquad u(0) = e+1.$$

Allora $u(1)$ vale

6. Sia $y = g(x)$ l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = 4\sin(x) + \ln(1+x^2) + 4e^{4x} - 16$ nel punto $x_0 = 0$. Calcolare $g(1)$.

7. Si consideri l'intervallo (c, d) in cui la funzione $f(x) = -2 - 3x^5 + 5x^3$ è monotona crescente. Si calcoli $f(c) - d$.

8. (*) Sia $F(x) = \frac{1}{2} \int_0^x f(t)\,dt$ dove $f(t) = 2 + t$ se $t \leq 0$ e $f(t) = 2 - t^2$ se $t > 0$. Si calcolino il punto di minimo relativo x_m , il punto di massimo relativo x_M e il numero N degli zeri di F .

9. Sia $z = \frac{8}{2-i}$. Allora $5(\mathrm{Im}(iz) + \mathrm{Re}(z)) =$

10. Sia $I = \int_0^1 \left(3\,x^3\,e^{-x^2} - (3/2)\right) dx$. Allora $e\,I =$

Analisi 1 - 21-01-2014 **Parte B**	**Cognome Nome - Firma**

1. Enunciare il Teorema del valor medio di Lagrange

2. (*) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ monotona. Sia $g(x) = |f(x)|$. Allora

$\boxed{\text{A}}$ g è monotona in tutto $\mathbf{R}$

$\boxed{\text{B}}$ esiste $a \in \mathbf{R}$ tale che g è monotona in $[a, +\infty)$

$\boxed{\text{C}}$ g non è monotona in tutto $\mathbf{R}$

$\boxed{\text{D}}$ g è continua in tutto $\mathbf{R}$

3. Sia $f(x) = 2x + 1$ e sia $g(f(x)) = 2e^{4x}$. Allora $g(x) = 2e^{2x-1}$.

$\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

4. Sia $f \in C^0([a, b])$ tale che $f(x) \geq 0$ e $\int_a^b f(x)dx = 0$. Allora $f(x) = 0$ per ogni $x \in [a, b]$.

$\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

5. Sia $\{a_n\}$ una successione reale tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ e sia $b_n = \cos(a_n)$. Allora

$\boxed{\text{A}}$ $\lim_{n\to+\infty} b_n = 1$

$\boxed{\text{B}}$ $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$

$\boxed{\text{C}}$ se $\lim_{n\to+\infty} b_n = 1$ allora $a_n = 2n\pi$

$\boxed{\text{D}}$ se $a_n = 2n\pi$ allora $\lim_{n\to+\infty} b_n = 1$

6. Si consideri la funzione $f(x) = x\sin x + \arctan x^2 - \ln(1-2x)$. Allora

A f è convessa e crescente in un intorno di $x = 0$

B f è concava e crescente in un intorno di $x = 0$

C f è concava e decrescente in un intorno di $x = 0$

D f è convessa in un intorno di $x = 0$ e $x = 0$ è punto di minimo relativo

7. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ differenziabile in un punto x_0 . Allora esistono $\delta > 0$ e $m_1 < 0$, $m_2 < 0$ tali che $m_1(x - x_0) + f(x_0) \leq f(x) \leq m_2(x - x_0) + f(x_0)$ per $0 \leq (x - x_0) \leq \delta$.

V F

8. Sia $f \in C^0([a,b])$ con $f(a) > 0$ e $f(b) > 0$. Allora

A esiste $c \in (a,b)$ tale che $f(c) = 0$

B esiste $c \in (a,b)$ t.c. $f'(c) = 0$

C $\lim_{x\to a^+} f(x) \geq 0$

D $\lim_{x\to b^-} f(x) \leq 0$

9. Sia $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ derivabile due volte. Allora

A f' è continua in tutto (a,b)

B f è limitata in (a,b)

C f è monotona in tutto $\mathbf{R}$

D esiste finito il limite $\lim_{x\to a^+} f'(x)$

10. Si considerino due successioni $a_n \neq 0$ e $b_n \neq 0$ tali che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = -\infty$. Allora

A $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n^2} = -\infty$

B $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = -\infty$

C $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = +\infty$

D $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n^3} = -\infty$

Soluzioni della prova del 21/01/2014

Parte A

1. 1

2. 1

3. converge, diverge

4. 15

5. 2

6. 8

7. -5

8. -2, $\sqrt{2}$, 3

9. 32

10. -3

Parte B

1. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e derivabile in (a, b). Allora esiste $x_c \in (a, b)$ tale che

$$f'(x_c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

2. B

3. F

4. V

5. D

6. A

7. F

8. C

9. A

10. A