

ESERCITAZIONI DI ANALISI 1

1. Determinare per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni sono continue nel loro dominio di definizione.

$$f(x) = \begin{cases} 3 \cos(x) - 4x & \text{se } x < \frac{\pi}{4}, \\ a \sin(x) & \text{se } x \geq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(a^2+1)x}{\ln(1+2x)} & \text{se } x > 0, \\ |2x^2 - 3x - 5| & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

2. Determinare per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ la seguente funzione continua nel loro dominio di definizione.

$$f(x) = \begin{cases} b^2 x^2 + b^3 x + b & \text{se } x < 0, \\ 3^{ax} - 4 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

3. Calcolare i seguenti limiti.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) \frac{(e^{2x^3} - 1) \arctan(x)}{x^4},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(4x)}{1 - \cos(4x)},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^7)}{x} \left(\frac{1}{x^6 + 2} \right) \ln(1+x),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + 4x^4)^7 - 1}{x^2 \tan(x^2)},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2) \ln(x^3 + 1)}{x^5} (1+x)^{\frac{1}{x}},$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{1}{n} + 1 \right) \sqrt[4]{n^8 + \ln(n)},$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (4n^9 + 7\sqrt{n}) \left[\cos \left(\frac{1}{n} \right) - 1 \right] \tan \left(\frac{1}{n^7} \right) \left[\left(1 + \frac{1}{3n} \right)^{3n} \right],$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{1}{n^2} + 1 \right) \frac{\sin(n^2)}{n^2} \sin \left(\frac{1}{n^2} \right) \sqrt{n^8 + \ln(e^{n^2+100})}.$$

4. Calcolare il seguente limite per $x \rightarrow 0$ e per $x \rightarrow +\infty$, rispettivamente.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3x^4 + 1)(5 \arctan(x^7)[(1+x^2)^4 - 1])}{x^9(x-3)^3},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x^4 + 1)(5 \arctan(x^7)[(1+x^2)^4 - 1])}{x^9(x-3)^3}.$$

5. Studiare il carattere delle seguenti serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sinh\left(\frac{1}{n^3}\right) \frac{\arctan(n^7)}{\arctan \frac{1}{n^7}} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{n^{12} + 1000}}\right),$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n(e^{\frac{1}{n^3}} - 1) \left[\left(\frac{1}{n} + 1\right)^7 - 1 \right] \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) (\sqrt[3]{n^6 + \sqrt{n}}).$$

6. Studiare il carattere delle seguenti serie al variare del parametro $a \geq 0$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^{\frac{1}{2}} - 3^n}{a^{n+1} + 3n^3},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n} + n^a}{n^6 \arctan \frac{1}{n}}.$$