Analisi Matematica I - 19/07/17 - Tempo a disposizione: 3h

Matricola **Cognome e Nome**

A1. Determinare gli eventuali punti di minimo e massimo relativo della funzione $f(x) = \dfrac{-4x}{3x^2+2}$.

Stabilire se i punti trovati sono di minimo o di massimo assoluto per la funzione f.

A2. Stabilire se il seguente integrale converge o diverge $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{\ln(x^7)+x^3}{\cos(x)+x^2}\,dx$.

A3. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'' - 5u' + 6u = 0, \\ u(0) = 3, \\ u'(0) = 8. \end{cases}$$

A4.* Scrivere il polinomio di MacLaurin di grado 2 della funzione

$$F(x) = \int_0^x e^{\sin t}(5t+3)\,dt.$$

A5.* Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Stabilire se la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \alpha^n \frac{1+e^{-n}}{2+\ln(n)}$ converge, diverge o oscilla (è irregolare) per

$\alpha = -1$, $\alpha = 2$, $\alpha = -\frac{1}{2}$.

A6. Determinare la parte reale del numero complesso $\dfrac{2i}{2+i}$.

A7.* Determinare gli eventuali punti di non derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2|x-3|+1 & \text{per } x \le 6, \\ 6e^{\frac{x}{3}-2}+1 & \text{per } x > 6. \end{cases}$$

A8. Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{7+4n^4}-2n^2}{\ln\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)}$.

A9. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{5\sin(x)\cos(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx$.

A10.* Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sin(x^2)(\cos(2x)-2)}{-2x^2(e^{5x}+5)}$.

B1. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile e sia $c \in (a, b)$. Allora $\int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx =$ $\boxed{\text{A}}$ $\int_a^c f(x)\, dx$ $\boxed{\text{B}}$ $\int_b^a f(x)\, dx$ $\boxed{\text{C}}$ $\int_c^b f(x)\, dx$ $\boxed{\text{D}}$ $\int_a^b f(x)\, dx$.

B2.* Sia (a_n) una successione di numeri positivi. Si ha che: $\boxed{\text{A}}$ se (a_n) è monotona decrescente, allora $a_n \to 0$ $\boxed{\text{B}}$ se (a_n) è monotona decrescente, allora ha limite finito $\boxed{\text{C}}$ se (a_n) è superiormente limitata, allora ha limite finito $\boxed{\text{D}}$ se $a_n \to 0$, allora (a_n) è monotona decrescente.

B3.* Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$ allora $\boxed{\text{A}}$ $\forall\, \epsilon > 0$ si ha $f(x) \geq 1 - \epsilon$ definitivamente $\boxed{\text{B}}$ $\forall\, \epsilon > 0$ si ha $f(x) < -1 - \epsilon$ definitivamente $\boxed{\text{C}}$ $\forall\, \epsilon > 0$ si ha $f(x) < -1 + \epsilon$ definitivamente $\boxed{\text{D}}$ $\forall\, \epsilon > 0$ si ha $f(x) \geq 1 + \epsilon$ definitivamente.

B4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione periodica di periodo T. Allora la funzione $g(x) := f(2x)$ $\boxed{\text{A}}$ è periodica di periodo $\frac{1}{2}$ $\boxed{\text{B}}$ è periodica di periodo $\frac{T}{2}$ $\boxed{\text{C}}$ non è periodica $\boxed{\text{D}}$ è periodica di periodo $\frac{2}{T}$.

B5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $f(0) = 0$ e $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$. Allora la retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x = 0$ è $\boxed{\text{A}}$ $y = 0$ $\boxed{\text{B}}$ $y = x$ $\boxed{\text{C}}$ $y = 1$ $\boxed{\text{D}}$ $y = x + 1$.

B6.* Si consideri $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continua in $[a, b]$, derivabile in (a, b) e tale che $f(a) < f(b)$. Allora $\boxed{\text{A}}$ esiste un punto $x_c \in (a, b)$ in cui $f'(x_c) < 0$ $\boxed{\text{B}}$ per ogni punto $x_c \in (a, b)$ si ha $f'(x_c) > 0$ $\boxed{\text{C}}$ esiste un punto $x_c \in (a, b)$ in cui $f'(x_c) = 0$ $\boxed{\text{D}}$ esiste un punto $x_c \in (a, b)$ in cui $f'(x_c) > 0$.

B7.* Sia f una funzione tale che $f(x) = x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$. Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ $\boxed{\text{A}}$ è indeterminata $\boxed{\text{B}}$ diverge a $+\infty$ $\boxed{\text{C}}$ diverge a $-\infty$ $\boxed{\text{D}}$ converge.

B8. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua con $f(a) < f(b)$. Allora $\boxed{\text{A}}$ esiste un punto di massimo in (a, b) $\boxed{\text{B}}$ esiste un punto di massimo in $(a, b]$ $\boxed{\text{C}}$ esiste un punto di minimo in (a, b) $\boxed{\text{D}}$ esiste un punto di minimo in $(a, b]$.

B9. Sia $f(x) = x^a$ per $x \geq 0$ e $0 < a < 1$. Allora f è $\boxed{\text{A}}$ crescente e convessa $\boxed{\text{B}}$ crescente e concava $\boxed{\text{C}}$ decrescente e concava $\boxed{\text{D}}$ decrescente e convessa.

B10. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte con $f''(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Se $x_0 \in \mathbb{R}$ è tale che $f'(x_0) = 0$, allora $\boxed{\text{A}}$ x_0 è un punto di massimo assoluto per f $\boxed{\text{B}}$ x_0 è un punto di minimo assoluto per f $\boxed{\text{C}}$ x_0 è un punto di flesso per f $\boxed{\text{D}}$ x_0 è un punto di massimo relativo per f.

Soluzioni

A1. La funzione f è definita su tutto $\mathbb{R}$. La sua derivata è

$$f'(x) = 4\frac{3x^2 - 2}{(3x^2+2)^2}.$$

Studiando il segno di f', si trova che f è strettamente crescente in $(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}})$ e in $(\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty)$, ed è strettamente decrescente in $(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}})$. I punti critici sono $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. Dalla monotonia di f segue che $x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ è un punto di massimo relativo e $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ è un punto di minimo relativo.

Disegnando il grafico della funzione e usando che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, si deduce che in realtà $x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ è un punto di massimo assoluto e $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ è un punto di minimo assoluto.

A2. L'integrale diverge perché la funzione integranda è asintotica a x, per $x \to +\infty$.

A3. $u(x) = e^{2x} + 2e^{3x}$

A4. Si ha che $F(0) = 0$ e $F'(x) = e^{\sin x}(5x+3)$, da cui segue che $F'(0) = 3$, $F''(x) = e^{\sin x}(5x+3)\cos x + 5e^{\sin x}$ e $F''(0) = 8$. Pertanto il polinomio di MacLaurin di grado 2 è $3x + 4x^2$.

A5. Per $\alpha = -1$ la serie converge per il criterio di Leibniz. Per $\alpha = 2$ la serie diverge a $+\infty$, perché si tratta di una serie a termini positivi il cui termine generale non tende a 0. Per $\alpha = -\frac{1}{2}$ la serie converge assolutamente (quindi converge): infatti, si ha che

$$\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{1+e^{-n}}{2+\ln(n)}\right| = \frac{1}{2^n}\frac{1+e^{-n}}{2+\ln(n)}.$$

Poiché

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{2^n}\frac{1+e^{-n}}{2+\ln(n)}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+e^{-n}}{2+\ln(n)} = 0$$

e la serie geometrica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ converge, per il criterio del confronto asintotico anche la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\frac{1+e^{-n}}{2+\ln(n)}$ converge.

A6. $\dfrac{2}{5}$

A7. Nell'intervallo $(-\infty, 6)$ la funzione f è derivabile in tutti i punti, tranne $x = 3$. Nell'intervallo $(6, +\infty)$ la funzione f è derivabile in tutti i punti. Nel punto $x = 6$ si trova che

$$\lim_{x\to 6^-} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6} = \lim_{x\to 6^+} \frac{f(x)-f(6)}{x-6} = 2,$$

da cui segue che f è derivabile in $x = 6$. Pertanto l'unico punto di non derivabilità di f è $x = 3$.

A8. Usando che $\ln(1+\frac{1}{2n^2}) \sim \frac{1}{2n^2}$ per $n \to +\infty$ e razionalizzando,

$$\frac{\sqrt{7+4n^4}-2n^2}{\ln\left(1+\dfrac{1}{2n^2}\right)} = \frac{7+4n^4-4n^4}{(\sqrt{7+4n^4}+2n^2)\ln\left(1+\dfrac{1}{2n^2}\right)} \sim \frac{7}{4n^2\cdot\dfrac{1}{2n^2}} \to \frac{7}{2}$$

per $n \to +\infty$.

A9. Per sostituzione ponendo $1+\cos^2(x) = t$, da cui $-2\cos(x)\sin(x)\,dx = dt$, si ha che

$$\int \frac{5\sin(x)\cos(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx = -\frac{5}{2}\int \frac{1}{t}\,dt = -\frac{5}{2}\ln|t| + c = -\frac{5}{2}\ln(1+\cos^2(x)) + c.$$

A10. Tenendo conto che $\sin(x^2) \sim x^2$ per $x \to 0$ e che $\cos(2x) \to 1$ e $e^{5x} \to 1$ per $x \to 0$, si ottiene

$$\frac{\sin(x^2)(\cos(2x)-2)}{-2x^2(e^{5x}+5)} \sim \frac{x^2(1-2)}{-2x^2(1+5)} \to \frac{1}{12}$$

per $x \to 0$.

B1. A

B2. B

B3. C

B4. B

B5. B

B6. D

B7. D

B8. B

B9. B

B10. B