Analisi Matematica I - 24/01/17 - Tempo a disposizione: 3h

Matricola **Cognome e Nome**

A1. Calcolare $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2\ln(1+n)+3}{n+2\cos(n)}+n\sin\left(\frac{3}{n}\right)\right)$.

A2.* Calcolare $\lim_{x\to 0}\frac{3x^2e^{-7x^4}-3\sin(x^2)}{e^{-7x^4}\ln(1+7x^6)}$.

A3. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x)+10\,y'(x)+29\,y(x)=0, \\ y(0)=0, \\ y'(0)=4. \end{cases}$$

A4.* Calcolare $\int_0^\gamma x\sin(x)\,dx$ in funzione di $\gamma\in\mathbb{R}$.

Calcolare (utilizzando l'integrale precedente) $\int_0^{\pi/6} 4x\sin(2x+\pi)\,dx$.

A5. Stabilire se il seguente integrale converge o diverge $\int_3^{+\infty}\left(\frac{\sin(x)}{(x+2)^4}+2^{-2x}\right)dx$.

A6.* Siano $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Determinare il valore di α per cui la funzione

$$f(x)=\begin{cases} 2+\beta(x-3)+2(x-3)^2 & \text{per } x<3, \\ \dfrac{\alpha}{1-2x} & \text{per } x\geq 3. \end{cases}$$

risulta continua in $x=3$.

Determinare il valore di β per cui f risulta derivabile in $x=3$.

A7. Calcolare il polinomio di MacLaurin di grado 2 della funzione $f(x)=-5\cos^2(x)+4e^{2x^2}$.

A8. Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $2z^3=-8$, esprimendo le soluzioni in forma algebrica.

A9. Stabilire se la serie $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{3n\sqrt{n}+2\sin^2(n)}{2n^2+\log_2(n)}$ converge o diverge.

A10. * Determinare e classificare i punti di massimo e minimo (globali e locali) della funzione $f(x)=\left|\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x}\right|-1$.

B1. Sia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ limitata e monotona. Allora $\boxed{\text{A}}$ f è derivabile $\boxed{\text{B}}$ f è dispari $\boxed{\text{C}}$ f è continua $\boxed{\text{D}}$ f è integrabile .

B2. Sia (a_n) una successione limitata e sia (b_n) una successione tale che $b_n \to +\infty$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $a_n + b_n$ tende a $+\infty$ $\boxed{\text{B}}$ a_n/b_n tende a $+\infty$ $\boxed{\text{C}}$ $a_n - b_n$ tende a $+\infty$ $\boxed{\text{D}}$ $a_n b_n$ tende a $+\infty$.

B3.* Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(a)f(b) < 0$. Allora $\boxed{\text{A}}$ esiste $m > 0$ tale che $f(x) \geq m$ per ogni $x \in [a, b]$ $\boxed{\text{B}}$ f è monotona $\boxed{\text{C}}$ esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$ $\boxed{\text{D}}$ esiste $m < 0$ tale che $f(x) \geq m$ per ogni $x \in [a, b]$.

B4. Determinare quale delle seguenti funzioni è invertibile. $\boxed{\text{A}}$ $f(x) = 2\cos(x)$ per $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $\boxed{\text{B}}$ $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ per $x \in [0, 2\pi]$ $\boxed{\text{C}}$ $f(x) = \cos(2x)$ per $x \in [0, \pi]$ $\boxed{\text{D}}$ $f(x) = \frac{1}{2}\cos(x)$ per $x \in [0, 2\pi]$.

B5. Sia $f(x) = o(x^2)$ per $x \to 0^+$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $x^{1/2} f(x^{1/2}) = o(x^3)$ per $x \to 0^+$ $\boxed{\text{B}}$ $x^{1/2} f(x^{1/2}) = o(x^4)$ per $x \to 0^+$ $\boxed{\text{C}}$ $x^{1/2} f(x^{1/2}) = o(x^{3/2})$ per $x \to 0^+$ $\boxed{\text{D}}$ $x^{1/2} f(x^{1/2}) = o(x^2)$ per $x \to 0^+$.

B6.* Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $I = \displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$. Si ha che: $\boxed{\text{A}}$ se $I > 0$, allora $f(x) > 0$ per ogni $x \in [a, b]$ $\boxed{\text{B}}$ se $I < 0$, allora $f(x) < 0$ per ogni $x \in [a, b]$ $\boxed{\text{C}}$ se $f(b) < 0$, allora $I < 0$ $\boxed{\text{D}}$ se $f(x) > 0$ per ogni $x \in [a, b]$, allora $I > 0$.

B7.* Sia $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$. Allora

$\boxed{\text{A}}$ $\forall k > 0\ \exists \bar{x} > 2 : f(x) < k$ per $x \in (2, \bar{x})$ $\boxed{\text{B}}$ $\forall k > 0\ \forall \bar{x} > 2 : f(x) > k$ per $x \in (2, \bar{x})$

$\boxed{\text{C}}$ $\forall k > 2\ \exists \bar{x} > 2 : f(x) > k$ per $x \in (2, k)$ $\boxed{\text{D}}$ $\forall k > 0\ \exists \bar{x} > 2 : f(x) > k$ per $x \in (2, \bar{x})$

.

B8. * Sia $b \in (-\infty, 0)$ tale per cui la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b^n$ converga. Allora la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (b+1)^n$ $\boxed{\text{A}}$ è indeterminata (oscilla) $\boxed{\text{B}}$ converge $\boxed{\text{C}}$ diverge a $+\infty$ $\boxed{\text{D}}$ diverge a $-\infty$.

B9. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione. Sotto quali ipotesi il teorema di Lagrange afferma che esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$? $\boxed{\text{A}}$ f continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) $\boxed{\text{B}}$ f derivabile in (a, b) $\boxed{\text{C}}$ f derivabile in (a, b) tale che $f(a) = f(b)$ $\boxed{\text{D}}$ f continua in $[a, b]$.

B10. Siano $a, b \in (1, +\infty)$ e sia $c = \log_a(ab)$. Allora si ha $\boxed{\text{A}}$ $c = 1$ $\boxed{\text{B}}$ $c < 0$ $\boxed{\text{C}}$ $0 < c < 1$ $\boxed{\text{D}}$ $c > 1$.

Soluzioni

A1. Si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2\ln(1+n)+3}{n+2\cos(n)} = 0.$$

Usando il limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{3}{n}\right) = 3.$$

Pertanto il limite richiesto è 3.

A2. Osservare che a denominatore l'esponenziale e^{-7x^4} tende a 1 per $x \to 0$. Pertanto, basta studiare

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2 e^{-7x^4} - 3\sin(x^2)}{\ln(1+7x^6)}.$$

Usando gli sviluppi $e^{-7x^4} = 1 - 7x^4 + o(x^4)$, $\sin(x^2) = x^2 - \frac{1}{6}x^6 + o(x^6)$, $\ln(1+7x^6) = 7x^6 + o(x^6)$, si ottiene

$$\frac{3x^2 e^{-7x^4} - 3\sin(x^2)}{\ln(1+7x^6)} = \frac{3x^2(1-7x^4+o(x^4)) - 3x^2 + \frac{1}{2}x^6 + o(x^6)}{7x^6+o(x^6)} = \frac{-\frac{41}{2}x^6 + o(x^6)}{7x^6+o(x^6)}.$$

Il limite richiesto è quindi $-\frac{41}{14}$.

A3. $y(x) = 2e^{-5x}\sin(2x)$

A4. Integrando per parti

$$\int_0^\gamma x\sin(x)\,dx = \big[-x\cos(x)\big]_0^\gamma + \int_0^\gamma \cos(x)\,dx = -\gamma\cos(\gamma) + \sin(\gamma).$$

Per il secondo integrale osservare che $\sin(2x+\pi) = -\sin(2x)$. Usando questa osservazione e la sostituzione $2x = t$, si ottiene

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/6} 4x\sin(2x+\pi)\,dx &= -\int_0^{\pi/6} 4x\sin(2x)\,dx = -\int_0^{\pi/3} t\sin(t)\,dt \\ &= \frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2},\end{aligned}$$

dove abbiamo usato la prima parte dell'esercizio con $\gamma = \pi/3$ per il calcolo dell'ultimo integrale.

A5. Il termine $\sin(x)/(x+2)^4$ dà luogo a un integrale assolutamente convergente, perché

$$\left|\frac{\sin(x)}{(x+2)^4}\right| \le \frac{1}{(x+2)^4}$$

e $1/(x+2)^4$ è asintotico a $1/x^4$ per $x \to +\infty$. Il termine esponenziale dà luogo a un integrale convergente. Quindi, l'integrale complessivo converge.

A6. $\alpha = -10$, $\beta = -4/5$

A7. $-1+13x^2$

A8. $\sqrt[3]{4}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $-\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{4}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

A9. La serie diverge perché il termine generale è asintotico a $\dfrac{3}{2\sqrt{n}}$.

A10. Osservare che la funzione è definita per $x \neq 0$. Inoltre, si riscrive come

$$f(x) = \frac{|2-3x|}{x^2} - 1 = \begin{cases} \dfrac{2-3x}{x^2} - 1 & \text{per } x < 0 \text{ e per } 0 < x \leq \frac{2}{3}, \\ \dfrac{3x-2}{x^2} - 1 & \text{per } x > \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Usando le proprietà del valore assoluto, si vede che $f(x) \geq -1$ per ogni $x \neq 0$, e $f(x) = -1$ soltanto per $x = \frac{2}{3}$. Pertanto $x = \frac{2}{3}$ è l'unico punto di minimo assoluto.

Poiché $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, non esistono punti di massimo assoluto.

Per trovare i punti di estremo relativo si calcola la derivata di f (che esiste per $x \notin \{0, \frac{2}{3}\}$):

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x(3x-4)}{x^4} & \text{per } x < 0 \text{ e per } 0 < x < \frac{2}{3}, \\ \dfrac{x(4-3x)}{x^4} & \text{per } x > \frac{2}{3}. \end{cases}$$

C'è un unico punto critico $x = \frac{4}{3}$, che dallo studio del segno della derivata risulta essere un punto di massimo relativo.

B1. D

B2. A

B3. D

B4. B

B5. C

B6. D

B7. D

B8. B

B9. A

B10. D