Analisi Matematica 1 - 24/02/2014

Nome e Cognome - Firma

A1. Sia $F(x) = \displaystyle\int_x^2 \frac{\arctan(5t)}{t^2}\,dt$. Calcolare $\lim_{x\to 0^+} F(x)$.

A2. **(I)** Calcolare $u(0)$ dove u risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = \dfrac{2t^2}{u^{1/2}(t)} & \text{in } (-2,+\infty) \\ u(-2) = 0. \end{cases}$$

(II) Stabilire per quali valori del parametro α la seguente serie converge

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + \arctan(n)}{1+n^\alpha}.$$

A3. Sia $f(x) = e^{2x} + x - 1$ e sia $g(x) = f^{-1}(x)$. Calcolare $g'(0)$.

A4.* Siano $f(x) = e^x - e^3$ e $g(x) = (f(x))^2$. Trovare i punti stazionari di g e classificarli.

A5. Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^{-1/2}\sin(n) - 4\arctan(1-n) + e^{-5n}$.

A6. Sia $f(x) = e^{2x^2}$. Stabilire se f è crescente o descrescente e concava o convessa in un intorno di $x_0 = -2$.

A7. Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$u''(t) + 2u'(t) + 2 = 0.$$

A8. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{2\ln x}{x-1} + \frac{\sin(\pi x)}{\cos(-2x)}$.

A9. Siano z_1, z_2, z_3 le radici complesse di $z^3 + z^2 + z = 0$. Calcolare $z_1 + z_2 + z_3$.

A10.* Calcolare $\displaystyle\int_0^2 x\ln(x/2)\,dx$.

B1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in $\mathbb{R}$ e derivabile in $(-\infty, x_0) \cup (x_0, +\infty)$. Se $f' > 0$ in un intorno sinistro di x_0 e $f' < 0$ in un intorno destro di x_0, allora possiamo dedurre che x_0 è un punto di $\boxed{\text{A}}$ massimo locale $\boxed{\text{B}}$ minimo globale $\boxed{\text{C}}$ massimo globale $\boxed{\text{D}}$ minimo locale .

B2. Sia $y = mx + q$ l'equazione della retta tangente al grafico di f in x_0. Allora il polinomio di Taylor di ordine uno rispetto al punto x_0 è $\boxed{\text{A}}$ $p(x) = qx - m$ $\boxed{\text{B}}$ $p(x) = mx + q$ $\boxed{\text{C}}$ $p(x) = -mx + q$ $\boxed{\text{D}}$ $p(x) = qx + m$.

B3. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e derivabile e tale che $f'(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ per ogni $x \in [a, b]$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $f' > 0$ $\boxed{\text{B}}$ $f'' < 0$ $\boxed{\text{C}}$ $f'' = 0$ $\boxed{\text{D}}$ $f'' > 0$.

B4. Sia I un intervallo in $\mathbb{R}$ e sia $f : I \to \mathbb{R}$ continua. Per applicare il teorema di Weierstrass è necessario che l'intervallo I sia del tipo $\boxed{\text{A}}$ $(-\infty, b]$ $\boxed{\text{B}}$ (a, b) $\boxed{\text{C}}$ $[a, +\infty)$ $\boxed{\text{D}}$ $[a, b]$.

B5.* Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x \sin(1/x)$ se $x \neq 0$ e $f(x) = 0$ se $x = 0$. Allora $\boxed{\text{A}}$ f è monotona in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{B}}$ f è discontinua in $x_0 = 0$ $\boxed{\text{C}}$ f è dispari $\boxed{\text{D}}$ f è continua in $\mathbb{R}$.

B6. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotona crescente e sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotona decrescente. Allora $\boxed{\text{A}}$ $f \circ g$ è costante $\boxed{\text{B}}$ $f \circ g$ è monotona crescente $\boxed{\text{C}}$ $f \circ g$ è monotona decrescente $\boxed{\text{D}}$ se x_0 è un punto stazionario per g allora x_0 è un punto di minino relativo per f .

B7. Sia $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\, dt$. Allora $\boxed{\text{A}}$ F è monotona decrescente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{B}}$ F è pari in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{C}}$ F è monotona crescente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{D}}$ F è convessa in $\mathbb{R}$.

B8.* Siano f di classe $C^1(\mathbb{R})$ ed $L > 0$ tali che: per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha $|f(x_0 + h) - f(x_0)| \leq L|h|$ per ogni $h \in \mathbb{R}$. Allora $\boxed{\text{A}}$ f è monotona crescente $\boxed{\text{B}}$ f è monotona decrescente $\boxed{\text{C}}$ f' è limitata $\boxed{\text{D}}$ f è limitata .

B9. Sia a_n un successione reale tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$ con $\ell \in \mathbb{R}$. Quale delle seguenti affermazioni è vera? $\boxed{\text{A}}$ Se $\ell \geq 0$ allora $a_n < 0$ definitivamente $\boxed{\text{B}}$ Se $\ell \geq 0$ allora $a_n \geq 0$ definitivamente $\boxed{\text{C}}$ Se $\ell \geq 0$ allora $a_n > 0$ definitivamente $\boxed{\text{D}}$ Se $\ell > 0$ allora $a_n \geq 0$ definitivamente .

B10. Sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ tale che $0 \leq f(x) \leq x^{-\alpha}$ definitivamente per $x \to +\infty$. Quale delle seguenti affermazioni è vera? $\boxed{\text{A}}$ Se $\alpha = 1$ allora $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ oscilla $\boxed{\text{B}}$ Se $\alpha < 1$ allora $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ diverge $\boxed{\text{C}}$ Non si può dedurre nulla su $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ $\boxed{\text{D}}$ Se $\alpha > 1$ allora $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ converge .

Soluzioni della prova del 24/02/2014

Parte A

A1. $+\infty$

A2. 4 e $\alpha > 3$

A3. 1/3

A4. $x = 3$ minimo assoluto

A5. 2π

A6. decrescente e convessa

A7. $c_1 + c_2 e^{-2t} - t$

A8. 2

A9. -1

A10. -1

Parte B

B1. A

B2. B

B3. C

B4. D

B5. D

B6. C

B7. C

B8. C

B9. D

B10. D