Metodi Matematici per l'Ingegneria - 14/02/2013 - Parte A

1-OT. Siano $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$. Sia $\mathbf{s}_k$ una direzione di discesa per f in $\mathbf{x}_k$, si derivi la regola di Armijo imponendo che la riduzione attuale dell'obiettivo risulti almeno pari al 25% della riduzione predetta dal modello affine relativo a $f(\mathbf{x})$ in $\mathbf{x}_k$. Si fornisca inoltre l'interpretazione geometrica della regola di Armijo per la scelta del passo considerando la funzione $\phi(\alpha) = f(\mathbf{x}_k + \alpha\mathbf{s}_k)$.

2-OT. Sia $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $f \in C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$. Si imponga che l'update B_{k+1} verifichi l'equazione quasi-newton. Si indichi il legame tra B_{k+1} e l'Hessiana di f.

1-TD. Siano $g, h : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ definite da $g(t) = \sin(t)$, $h(t) = \cos(3t)$. Calcolare i coefficienti di Fourier c_n di $f = \lambda g + \eta h + \gamma$ per $\lambda, \eta, \gamma \in \mathbb{R}$.

2-TD. Sia $f : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ data da $f(t) = t$. Siano c_n i coefficienti di Fourier di f. Si consideri la succesione di polinomi trigonometrici (serie di Fourier troncata)

$$S_k(t) = \sum_{n=-k}^{k} c_n e^{int}, \qquad \text{per } k \in \mathbb{N}.$$

Descrivere come S_k converge ad f in $(0, 2\pi)$.

Metodi Matematici per l'Ingegneria - 14/02/2013 - Parte B

1-OT. Si consideri la funzione $f(\mathbf{x}) = (a * x^2 + y^2 - b * y * (x+1))^3$ con $a = 4, b = 2$.

1. Si trovino e si classifichino i punti stazionari.
2. Si utilizzi la function **fminunc** applicando il metodo Quasi-Newton 'bfgs' . Si dichiari nelle **options** che :

   - il tipo di problema non è LargeScale;
   - l'update è *bfgs* ;
   - l'identità è presa come matrice iniziale approssimante l'Hessiana;
   - si fornisca il gradiente
   - si assegnino le tolleranze: TolFun:1.e-10; TolX: 1.d-10 .

   Si consideri la function **fminunc** con le options precedenti e la si applichi considerando i seguenti due punti iniziali : $\mathbf{x}_0 = (2, 2)$ e $\mathbf{x}_0 = (1.9, 2)$

   Per ciascun dato iniziale si riportini i valori a cui convergono i valori di

   $$\mathbf{x}, \quad f(\mathbf{x}) = fval, \quad \text{First-order optimality}, \quad \text{iterations}, \quad \text{funcCount}$$

3. Discutere i risultati analizzando anche il grafico ottenuto con la visualizzazione della funzione $z = f(x, y)$ per $0 \le x \le 0.6$ e $0 \le y \le 2.5$.
4. Si valuti la velocità di convergenza del metodo iterativo per i due punti iniziali. Si consideri la norma infinito del gradiente, cioè dei valori di *First-order optimality*, li si carichi nel vettore **gobj** e per ciascun caso si esegua il seguente programma:

   - format short e
   - nit=length(gobj);
   - for i=1:nit-1
   - it(i)=i;
   - rf(i)=gobj(i+1)/gobj(i);
   - end
   - it(nit)=nit;
   - figure(1)
   - plot(it, log10(gobj)),'-r*')
   - disp(rf')

   Si riporti il grafico qualitativo del comporatemento del log10(gobj) e si analizzi il comportamento del fattore *rf* e si valuti la convengenza dell'algoritmo per i due dati iniziali.

5. Si discuta la ragione del diverso comportamento asintotico.

1-TD. Sia $f(t) = t^2 \cos(t)$. Siano c_n i coefficienti di Fourier di f. Riportare un grafico qualitativo di $|c_n|$, $\mathrm{Re}(c_n)$ e $\mathrm{Im}(c_n)$. Calcolare, in funzione dei c_n,

$$I_1 = \int_0^{2\pi} f(t)\, dt\,, \qquad I_2 = \int_0^{2\pi} f^2(t)\, dt\,.$$

2-TD. Sia $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ continua. Sia $Y = \mathrm{fft}(f)/N$ il vettore MATLAB dei coefficienti di Fourier. Stabilire se è corretto che

$$\mathrm{Im}(Y(1)) = 0\,, \qquad \mathrm{Im}(Y(2)) = \mathrm{Im}(Y(N))\,, \qquad \mathrm{Re}(Y(2)) = \mathrm{Re}(Y(N))\,.$$