

1. (3 punti) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^3(20x)}{x^2 e^{20x}} + \frac{1 - e^{-20x^2}}{x \arctan x} + \frac{20x^2 - x^3 + 20x^4}{x^4 + 2x^2} \right) =$ 30

2. (2 punti) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan(-7x^3) + \frac{x^2 + 7x^5}{7x^6 + x^4} - 7 \sin\left(\frac{7}{x} - \frac{3\pi}{2}\right) \right) =$ -6

3. (3 punti) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \max(-3x^2; -3x^4) - \ln(1 + 3x^2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, dove $\max(-3x^2; -3x^4)$ denota, al variare di x , il massimo fra i due valori $-3x^2$ e $-3x^4$. Quali delle seguenti proprietà ha la funzione f in tutto \mathbb{R} ?
 A) f è continua; B) f è derivabile; C) f è monotona; D) f è limitata inferiormente;
 E) f è limitata superiormente; F) f è pari; G) f è dispari; H) f è periodica.
 (N.B. La risposta a questa domanda sarà considerata esatta, se e solo se saranno indicate tutte e sole le proprietà che ha effettivamente la funzione f , fra quelle riportate qui sopra.)

A - E - F

4. (4 punti) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da: $f(x) = |x \arctan(5x)|$, $\forall x \leq 0$;
 $f(x) = (a + 5)x + \frac{b+1}{4}x^2 + ax^3$, $\forall x > 0$, dove a e b sono parametri reali.
 Siano a^* e b^* , rispettivamente, gli unici valori di a e di b per cui la funzione f è derivabile 2 volte in tutto \mathbb{R} . Allora $b^* - 2a^*$ vale 29

5. (2 punti) Sia $f(x) = e^{4 \arctan(x+1)} + 4x^5 + x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Sia g la funzione inversa della funzione f . Allora $\frac{1}{g'(-4)}$ vale 25

6. (2 punti) Sia $z = 1 - 6i$. Allora $\text{Im}(z - i\bar{z}) - \text{Re}(iz^2)$ vale -19

- Per ciascuna delle 12 domande : 2 punti o 3 punti o 4 punti, come specificato nel testo, se la risposta è esatta ; 0 punti, se la risposta è sbagliata o non è data.
- La prova è superata e lo Studente è ammesso alla prova orale, se il punteggio totale così ottenuto è maggiore o uguale di 16 punti.
- Tempo a disposizione: 2 ore .

7. (2 punti) Sia $J = \int_{-1}^1 (7x^2|x| + xe^{-7x^2} + 7\sqrt{|x|}) dx$ Allora $6J$ vale

77

8. (4 punti) Sia $F(x) = 20 + \int_x^{x+20} e^{-t^2} dt, \forall x \in \mathbb{R}$. Sia x_M l'unico punto di massimo della funzione F ; sia inoltre $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$. Allora $2L - x_M$ vale

50

9. (2 punti) Sia $f(x) = -\frac{x^4}{12} + \frac{1}{6}x^3 + 3x^2 + 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Sia $I = (c, d)$ il più grande intervallo di \mathbb{R} in cui la funzione f è convessa. Allora $3c - 2d$ vale

- 12

10. (2 punti) Sia $u: I \rightarrow \mathbb{R}$, la soluzione del problema di Cauchy:
 $u'(x) = 15x^2 e^{-u(x)}, \forall x \in I; u(0) = 0$, dove I è un opportuno intorno di $x_0 = 0$.
 Allora $e^{u(2)}$ vale

41

11. (3 punti) Sia $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la soluzione del problema di Cauchy:
 $y''(t) + 4y(t) = 20 + 4t, \forall t \in \mathbb{R}; y(0) = 5, y'(0) = 3$.
 Allora $2y(\pi) + y'(\pi) - 2\pi$ vale

13

12. (3 punti) Sia $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da: $g(x) = x + 2, \forall x < 0$; $g(x) = -x, \forall x \in [0, 1]$; $g(x) = -1, \forall x > 1$. Si consideri la funzione integrale $G_1(x) = \int_1^x g(t) dt, \forall x \in \mathbb{R}$.

Allora $2G_1(6) + G_1(0) + G_1(-2)$ vale

- 11

- Per ciascuna delle 12 domande: 2 punti o 3 punti o 4 punti, come specificato nel testo, se la risposta è esatta; 0 punti, se la risposta è sbagliata o non è data.
- La prova è superata e lo Studente è ammesso alla prova orale, se il punteggio totale così ottenuto è maggiore o uguale di 16 punti
- Tempo a disposizione: 2 ore.