# Analisi 4 - Scritto del 13/12/2012

**1.** Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Sia $f = u + iv$ con $u$ e $v$ differenziabili in $\Omega$. Si definiscano

$$\partial_z f = \tfrac{1}{2}(\partial_x f - i\partial_y f) \qquad \partial_{\bar{z}} f = \tfrac{1}{2}(\partial_x f + i\partial_y f)\,,$$

dove $\partial_x f = u_x + iv_x$ e $\partial_y f = u_y + iv_y$.

Verificare che $f$ è olomorfa se e solo se $\partial_{\bar{z}} f = 0$ e che $f' = \partial_z f$.

**2.** Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{2z}{(z-1)(z+i)^2}\,.$$

Classificarne le singolarità. Calcolare

$$\int_C f(z)dz\,,$$

dove $C$ è il circuito $B_{1/2}(1)$ percorso una volta in senso anti orario.

**3.** Si consideri $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = [1 - |x|]_+$ (dove $[\cdot]_+$ denota la parte positiva). Si consideri poi la successione $f_n(x) = nf(nx)$.

- Verificare che $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ e calcolarne la norma.
- Verificare che $f_n \in L^1(\mathbb{R}^2)$ e calcolarne la norma.
- Studiarne la convergenza delle $f_n$ q.o., q.u., in $L^1$ e in misura.

**4.** Sia $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ e sia

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\, n^{-1}\, \delta_n(E)\,.$$

- Verificare se $\mu$ è una misura reale (con segno) definita su $\mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$.
- Determinare $\mu^\pm$ e $|\mu|$ e stabilire se sono misure finite e/o $\sigma$-finite.
- Verificare se $\mu^\pm$ sono assolutamente continue rispetto alla misura di Lebesgue.
- Sia $f(x) = x^\alpha$. Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ risulti $f \in L^1(\mathbb{R}^+, \mathcal{P}(\mathbb{R}^+), |\mu|)$.

**Tempo a disposizione: 2 ore**