Analisi D - Scritto del 13/07/2011

1. Sia f olomorfa in $\mathbb{C}$ e tale che $f(z) = f(z+i)$ per ogni $z \in \partial B_1(-i)$. Mostrare che

1. $f(z) = f(z+i)$ per ogni $z \in B_1(-i)$,
2. f è periodica di periodo i.

2. Calcolare

$$\int_C \frac{1}{z \sin z}\, dz\,,$$

dove C percorre $\{|z| = 4\}$ una volta in senso anti-orario.

3. Sia $f : (0,1) \times (0,1) \to \mathbb{R}$ data da

$$f_n(x,y) = (-1)^n (y-x)^n\,.$$

Studiare la convergenza (q.o., q.u., in misura e in L^1). Calcolare

$$\int_Q f_n(x,y)\, dxdx\,, \qquad \int_Q |f_n(x,y)|\, dxdy\,.$$

4. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Sia $g : [a,b] \to [0,1]$ strettamente crescente e suriettiva. Mostrare che $\mathrm{var}(f, [0,1]) = \mathrm{var}(f \circ g, [a,b])$.

Tempo a disposizione: 2 ore