

### 3 Singolarità, residui e integrali (19 ottobre 2007)

**Esercizio 3.1** Trovare i residui in 0 delle seguenti funzioni:

$$\frac{z^2 + 1}{z}, \quad \frac{z^2 + 3z - 5}{z^3}, \quad \frac{z}{(z-1)(z^4 + 1)}, \quad \frac{z^3}{(z-1)(z^4 + 2)}, \quad \frac{\sin z}{\cos z - 1},$$

$$\frac{e^z}{\sin z}, \quad \frac{2z + 1}{z(z^3 - 5)}, \quad \frac{\sin z}{z^4}, \quad \frac{\sin z}{z^5}, \quad \frac{\sin z}{z^6}, \quad \frac{\sin z}{z^7},$$

$$\frac{e^z}{z}, \quad \frac{e^z}{z^2}, \quad \frac{e^z}{z^3}, \quad \frac{e^z}{z^4}, \quad \frac{e^z}{\sin z}, \quad \frac{1}{\sinh z^2}, \quad \frac{z}{e^{iz^2} + 1}$$

$$e^{1/z}, \quad (z^2 + 1)e^{1/z}, \quad \frac{\sin 1/z}{z^2 + 1}, \quad e^{z - \frac{1}{z}},$$

Determinare anche le altre singolarità delle precedenti funzioni e, quando possibile, i relativi residui.

**Esercizio 3.2** Calcolare singolarità e, ove possibile, residui delle funzioni

$$\frac{1}{(z^2 - 1)(z + 1)}, \quad \frac{(z^3 - 1)(z + 2)}{(z^4 - 1)^2}, \quad \frac{1}{\sin z}, \quad \frac{1}{1 - e^z}, \quad \frac{1}{1 - \cos z}, \quad \frac{1}{\sin \frac{\pi}{z}}, \quad \frac{z}{e^z - 1}.$$

**Esercizio 3.3** Calcolare gli integrali

$$\int_{C_{1/2}(i)} \frac{1}{z^4 - 1} dz, \quad \int_{C_1(0)} \frac{\cos e^{-z}}{z^2} dz$$

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z^2 - 3z + 5} dz \quad \Gamma \text{ è il rettangolo di vertici } 0, 7, 7 + 4i, 4i$$

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{-z^2}}{z^2} dz, \quad \Gamma := \text{quadrato di vertici } 1 + i, -1 + i, -1 - i, 1 - i.$$

$$\int_{C_8(0)} \frac{1}{1 - e^z} dz, \quad \int_{C_8(0)} \frac{1 + z}{1 - \cos z} dz, \quad \int_{C_8(0)} \frac{1 + z}{1 - \sin z} dz, \quad \int_{C_8(0)} \tan z dz$$

$$\int_{B_1(0)} \frac{1}{\sin z} dz, \quad \int_{B_1(0)} \frac{e^{1/z}}{z} dz, \quad \int_{B_1(0)} \frac{e^{-z}}{z(z+2)} dz, \quad \int_{B_1(0)} (z + 1/z)^4 dz, \quad \int_{B_1(0)} \cot z dz$$

$$\int_{B_2(0)} \frac{1}{1 + z^2} dz, \quad \int_{B_e(0)} \pi \cot \pi z dz, \quad \int_{B_1(i)} \frac{2z^2 + 5}{(z + 1)(z^2 + 1)^2} dz,$$

**Esercizio 3.4** Al variare di  $\lambda \in ]0, +\infty[$ , sia  $C_\lambda$  la circonferenza di centro  $i$  e raggio  $\lambda$  nel piano complesso, orientata in senso antiorario. Calcolare, quando è ben definito, l'integrale

$$\int_{C_\lambda} \frac{e^z}{(z-1)^2(z^2+1)} dz.$$

**Esercizio 3.5** Determinare e classificare le singolarità della funzione complessa

$$u(z) = \frac{1}{((z+1)^3 - 8)(z-1)}.$$

Calcolare l'integrale di  $u$  lungo la circonferenza  $\Gamma$  di centro  $-2$  e raggio  $2$  orientata in senso antiorario.

**Esercizio 3.6** Determinare e classificare le singolarità delle funzioni di variabile complessa

$$u(z) := \frac{e^{iz^2}}{(z^2 + 4i)}, \quad v(z) := \frac{(z^2 - 1)}{(z + i)^2}.$$

**Esercizio 3.7** Calcolare il seguente integrale, dove  $\Gamma$  è il rettangolo di vertici  $0, -10, -10 + 2\pi i, 2\pi i$  orientato in senso antiorario:

$$\oint_{\Gamma} \frac{2}{e^{z+1} + i/3} dz \quad (= -12\pi)$$

**Esercizio 3.8** Calcolare l'integrale lungo la circonferenza  $\Gamma$  di centro 0 e raggio 2

$$\oint_{\Gamma} \left( \frac{e^{-\pi z}}{(z-i)^2} + \frac{1}{z-3} \right) dz \quad (= 2\pi^2 i)$$

**Esercizio 3.9** Calcolare l'integrale lungo la circonferenza  $\Gamma$  di centro 0 e raggio 5 orientata in senso antiorario

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{1+2z} \sin\left(\frac{2-\pi z}{2z}\right) dz \quad (= -\pi i)$$

**Esercizio 3.10** Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{\cos \frac{1}{z}}{(z-2)^2} + \frac{\sin \frac{1}{z}}{z-4}.$$

Determinarne la singolarità, classificarle, calcolare i relativi residui e calcolare  $\int_{\Gamma} f(z) dz$  dove  $\Gamma$  è la circonferenza che ha centro in  $z = 2$  e raggio 1 orientata in senso antiorario.

**Esercizio 3.11** Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) := \frac{z^3 e^{\pi/z^4}}{z^4 + 1}.$$

Determinare e classificare le singolarità di  $f$ , calcolandone i relativi residui, calcolare l'integrale  $I = \int_{\Gamma} f(z) dz$  lungo l'esagono  $\Gamma$  avente vertici ordinatamente in  $1, 1+i, i, -1, -1-i, -i$ .

**Esercizio 3.12** Sia  $C_{\lambda}(0)$  la circonferenza di centro l'origine e raggio  $\lambda > 0$  orientata in senso antiorario. In funzione del parametro  $\lambda$  si determini il valore dell'integrale in campo complesso (quando risulta ben definito)

$$\oint_{C_{\lambda}(0)} \left( z^2 e^{2/z} - \frac{4z}{z^2 + 9} \right) dz$$

**Esercizio 3.13** Sia  $f(z)$  la funzione di variabile complessa

$$f(z) := \frac{z^3 e^{4/z}}{z^4 + 16}.$$

Si determinino e si classifichino le singolarità di  $f$ .

Indicando con  $\Gamma$  la circonferenza di centro 2 e raggio  $2\sqrt{2}$  percorsa in senso antiorario, calcolare  $\oint_{\Gamma} f(z) dz$  verificando che si tratta di un numero puramente immaginario.

**Esercizio 3.14** Sia  $f(z)$  la funzione di variabile complessa

$$f(z) := \frac{z+2i}{z^3+8i} - \sin(1/z).$$

Si determinino e si classifichino le singolarità di  $f$ .

Indicando con  $\Gamma$  la circonferenza di centro 1 e raggio  $\sqrt{6}$  percorsa in senso antiorario, calcolare

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz$$