Analisi D - Scritto del 01/02/2011

1. Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa. Sia $h(z) = f(1/z)$ per $z \neq 0$. Mostrare che se h ha un polo di ordine k nell'origine, allora f è un polinomio di grado k.

2. Siano $p(z) = z + z^2/2$ e $q(z) = z + z^3/3$.

- Trovare le soluzioni dell'equazione $|p(z)| = 1$ con $|z| = 1$. Disegnare la curva $\mathcal{P}$ parametrizzata da $p \circ e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$. Calcolare $\mathrm{ind}(\mathcal{P}, 0)$.
- Trovare le soluzioni dell'equazione $|q(z)| = 1$ con $|z| = 1$. Disegnare la curva $\mathcal{Q}$ parametrizzata da $q \circ e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$. Calcolare $\mathrm{ind}(\mathcal{Q}, 1/3 - i/3)$.

3. Siano $\phi_n : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ definite da

$$\phi_n(t) = \begin{cases} \pi(t/\pi)^n & \text{per } 0 < t \leq \pi \\ \pi + n(t - \pi) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Considerare le funzioni $f_n : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ date da $f_n(t) = \sin(\phi_n(t))$. Mostrare che

- $\int_{(0,2\pi)} f_n \, dx \to 0$
- $f_n \not\to 0$ q.u.
- $f_n \not\to 0$ in $L^1(0, 2\pi)$.

4. Sia Ω un insieme infinito non numerabile. Si considerino le seguenti applicazioni definite su $\mathcal{P}(\Omega)$ (insieme delle parti di Ω):

$$\mu_1^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } A = \emptyset \\ 1 & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad \mu_2^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } A \text{ è finito} \\ 1 & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad \mu_3^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } A \text{ è numerabile} \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Verificare quali tra $\mu_1^*, ..., \mu_3^*$ sono misure esterne ed individuare la corrispondente σ-algebra degli insiemi misurabili.

Tempo a disposizione: 2 ore