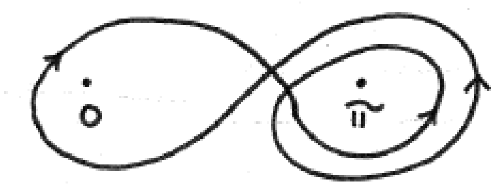
Analisi D - Scritto del 13/12/2011

1. Sia $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ olomorfa. Sia $g(z) = f(z) + f(-z)$. Mostrare che per ogni circuito C contentuto in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ si ha

$$\int_C g(\xi)\, d\xi = 0\,.$$

2. Caratterizzare le singolarità di

$$f(z) = \frac{1}{z \sin z}$$



e calcolare

$$\int_C f(\xi)\, d\xi\,,$$

dove C è il circuito in figura.

3. Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita (in coordinate polari) da

$$f_n(\rho, \theta) = \cos\theta \;\ln \rho^n\,.$$

Studiarne la convergenza puntuale. Stabilire se $f_n \in L^1(\mathbb{R}^2)$, se $f_n \in L^1(B_r(0))$ e se $f_n \in L^1(B_R(0) \setminus B_r(0))$ per $R > r > 0$.

4.

- Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^n$ si dice simmetrico (rispetto all'origine) se $A = -A$. Si consideri la collezione $\mathcal{S}$ degli insiemi simmetrici in $\mathbb{R}^n$. Mostrare che $\mathcal{S}$ è una σ-algebra.
- Si consideri poi la collezione $\mathcal{C}$ degli insiemi convessi in $\mathbb{R}^n$. Mostrare che $\mathcal{C}$ non è una σ-algebra.

Tempo a disposizione: 2 ore