

Prerequisiti per seguire il corso

- Insiemi numerici e aritmetica elementare.
- Equazioni e disequazioni di primo e secondo grado.
- Geometria elementare e geometria analitica: rette, parabole, iperbole equilatera.
- Proprietà delle potenze e dei logaritmi.
- Funzioni trigonometriche, solo formule fondamentali.

Equazioni

Equazioni di primo grado:

$$ax + b = 0$$

Se $a \neq 0$, la soluzione è $x = -\frac{b}{a}$.

Se $a = 0$ e $b \neq 0$, non esistono soluzioni.

Se $a = 0$ e $b = 0$, tutti i numeri reali sono soluzione.

Equazioni

Equazioni di secondo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

Se $b^2 - 4ac > 0$, ci sono due soluzioni:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Se $b^2 - 4ac = 0$, c'è una sola soluzione:

$$x_1 = -\frac{b}{2a}.$$

Se $b^2 - 4ac < 0$, non ci sono soluzioni.

Equazioni

Equazioni di grado superiore al secondo:

se il primo membro dell'equazione è il prodotto di fattori di grado 1 o 2, allora si usa la legge di annullamento del prodotto.

LEGGE DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists i : 1 \leq i \leq n, \quad a_i = 0$$

Equazioni

Esercizi

- 1) Risolvere l'equazione: $(x + 1)(2x - 3)(x + 4) = 0$.
- 2) Risolvere l'equazione: $(x^2 + 1)(2x^2 - 3)(x^2 + 4) = 0$.
- 3) Scrivere una equazione di terzo grado che ha 1, -1 e 2 come soluzioni.

Equazioni

Esercizi

- 1.** Una compagnia di telefonia mobile applica la seguente tariffa: 25 centesimi alla risposta e 15 centesimi al minuto successivamente. Un'altra compagnia applica invece la tariffa di 20 centesimi al minuto senza scatti alla risposta. Esiste un tempo di telefonata per cui le tariffe sono uguali? Qual è?
- 2.** Decido di stanziare 21.6 euro per l'acquisto di mele e pere. Voglio comprare un quantitativo di mele pari al triplo del quantitativo di pere. Sapendo che le mele costano 1.2 euro al chilo e le pere 1.8, quante mele e quante pere comprerò?

Equazioni

3. Il 30% degli abitanti di una città è europeo, mentre il 70% è africano. Sapendo che il 50% degli europei parla inglese, che il 20% degli africani parla inglese e che in città esattamente 580 persone parlano inglese, calcolare il numero N degli abitanti della città.

4. Il 20% degli studenti che si presentano all'esame di matematica conosce l'enunciato del "Teorema fondamentale del calcolo integrale". Tra quelli che conoscono l'enunciato il 30% ne conosce anche la dimostrazione. Sapendo che 3 studenti conoscono sia l'enunciato che la dimostrazione del teorema, scrivere il numero N degli studenti che si presentano all'esame di matematica.

Disequazioni di primo grado

$$ax + b \geq 0 \quad ax + b \leq 0 \quad ax + b > 0 \quad ax + b < 0$$

Quando si moltiplicano entrambi i membri di una disequazione per un numero negativo il \leq diventa \geq , ecc. . . .

Se $a > 0$:

- $ax + b \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{b}{a}$
- $ax + b \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{b}{a}$
- $ax + b > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$
- $ax + b < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$

Disequazioni di primo grado

Se $a < 0$:

- $ax + b \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{b}{a}$
- $ax + b \leq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{b}{a}$
- $ax + b > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$
- $ax + b < 0 \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$

Disequazioni di secondo grado

- $ax^2 + bx + c \geq 0$
- $ax^2 + bx + c \leq 0$
- $ax^2 + bx + c > 0$
- $ax^2 + bx + c < 0$

equazione associata: $ax^2 + bx + c = 0$

discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac$

Disequazioni di secondo grado

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \text{ con } a > 0 \quad \text{oppure} \quad ax^2 + bx + c \leq 0 \text{ con } a < 0$$

Se $\Delta > 0$, l'equazione associata ha due soluzioni $x = x_1$ e $x = x_2$ con $x_1 < x_2$.

Soluzioni per la disequazione: $x \leq x_1$ o $x \geq x_2$, cioè

$$x \in (-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty).$$

Se $\Delta = 0$, l'equazione associata ha una sola soluzione $x = x_1$.

Soluzioni per la disequazione: tutto l'insieme dei numeri reali.

Se $\Delta < 0$, non c'è nessuna soluzione per l'equazione associata.

Soluzioni della disequazione: tutto l'insieme dei numeri reali.

Disequazioni di secondo grado

$ax^2 + bx + c \geq 0$ con $a < 0$ oppure $ax^2 + bx + c \leq 0$ con $a > 0$

Se $\Delta > 0$, l'equazione associata ha due soluzioni $x = x_1$ e $x = x_2$ con $x_1 < x_2$.

Soluzioni per la disequazione: $x_1 \leq x \leq x_2$, cioè

$$x \in [x_1, x_2].$$

Se $\Delta = 0$, l'equazione associata ha una sola soluzione $x = x_1$.

Soluzioni per la disequazione: $x = x_1$.

Se $\Delta < 0$, non c'è nessuna soluzione per l'equazione associata.

Soluzioni della disequazione: nessuna soluzione.

Disequazioni di secondo grado

$ax^2 + bx + c > 0$ con $a > 0$ oppure $ax^2 + bx + c < 0$ con $a < 0$

Se $\Delta > 0$, l'equazione associata ha due soluzioni $x = x_1$ e $x = x_2$ con $x_1 < x_2$.

Soluzioni per la disequazione: $x < x_1$ o $x > x_2$, cioè

$$x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty).$$

Se $\Delta = 0$, l'equazione associata ha una sola soluzione $x = x_1$.

Soluzioni per la disequazione: tutto l'insieme dei numeri reali escluso il punto $x = x_1$.

Se $\Delta < 0$, non c'è nessuna soluzione per l'equazione associata.

Soluzioni della disequazione: tutto l'insieme dei numeri reali.

Disequazioni di secondo grado

$ax^2 + bx + c > 0$ con $a < 0$ oppure $ax^2 + bx + c < 0$ con $a > 0$

Se $\Delta > 0$, l'equazione associata ha due soluzioni $x = x_1$ e $x = x_2$ con $x_1 < x_2$.

Soluzioni per la disequazione: $x_1 < x < x_2$, cioè

$$x \in (x_1, x_2).$$

Se $\Delta = 0$, l'equazione associata ha una sola soluzione $x = x_1$.

Soluzioni per la disequazione: nessuna.

Se $\Delta < 0$, non c'è nessuna soluzione per l'equazione associata.

Soluzioni della disequazione: nessuna soluzione.

Potenze

Vogliamo definire a^x per $a > 0$, $a \neq 1$ e x numero reale qualunque.

Se $x = n \in \mathbb{N}$, cioè $x = 1, 2, 3, \dots$,

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a \quad n \text{ volte.}$$

Valgono le proprietà delle potenze:

- $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Potenze

Vogliamo ora definire a^x per $a > 0$, $a \neq 1$ e $x = 0$ in modo che continuino a valere le proprietà delle potenze. In tal caso:

$$a^n = a^{n+0} = a^n \cdot a^0$$

e l'unico numero che soddisfa questa equazione è $a^0 = 1$.

Vogliamo ora definire a^x per $a > 0$, $a \neq 1$ e $x = -n$ con n numero naturale in modo che continuino a valere le proprietà delle potenze. In tal caso:

$$1 = a^0 = a^{n+(-n)} = a^n \cdot a^{-n}$$

e l'unico numero che soddisfa questa equazione è $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Potenze

Vogliamo ora definire a^x per $a > 0$, $a \neq 1$ e $x = \frac{1}{n}$ con n numero naturale in modo che continuino a valere le proprietà delle potenze. In tal caso:

$$a = a^1 = a^{n \cdot (\frac{1}{n})} = (a^{\frac{1}{n}})^n$$

e l'unico numero che soddisfa questa equazione è $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Potenze

Vogliamo ora definire a^x per $a > 0$, $a \neq 1$ e $x = \frac{m}{n}$ con m, n numeri interi in modo che continuino a valere le proprietà delle potenze. In tal caso:

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{m \cdot \frac{1}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

dove si è supposto $n > 0$.

Potenze

Per quanto riguarda la definizione di a^x quando x è un numero reale qualunque, basti sapere che a parte ovvie difficoltà tecniche sostanzialmente legate a una corretta definizione di numero reale, la cosa è fattibile e quindi si riesce a dare un significato a oggetti del tipo

$$a^e, \quad a^\pi, \quad a^{\sqrt{2}}, \quad a^{-2\sqrt{3}}$$

in modo che ancora valgano le proprietà delle potenze.

Logaritmi

Una volta definite le potenze, siamo interessati a conoscere l'operazione inversa: in realtà le operazioni “inverse” della potenza sono due, a seconda che si prenda come variabile la base o l'esponente.

Se si prende come variabile la base, si ha x^k con $x > 0$. L'inversa risulta essere $x^{\frac{1}{k}}$, cioè ancora una potenza. Nel caso in cui k sia un numero naturale, si ha $\sqrt[k]{x}$.

Siamo ora interessati all'inversa quando si fissa la base (come sempre $a > 0$ e $a \neq 1$). Poiché a^x assume solo valori reali positivi, l'inversa (che si indica con $\log_a y$) sarà definita solo quando si prende un numero y reale positivo.

Fissato $y > 0$, $\log_a y$ è quell'unico numero reale x tale che $a^x = y$. (Naturalmente l'esistenza e unicità di questo numero andrebbe provata)

Logaritmi

Valgono le seguenti proprietà (proprietà dei logaritmi):

1) $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ per $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$

2) $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a x$ per $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$

Proviamo la prima uguaglianza: poniamo $z_1 = \log_a x$, $z_2 = \log_a y$ e $z = \log_a(x \cdot y)$. Si ha

$$a^{z_1+z_2} = a^{z_1} \cdot a^{z_2} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = x \cdot y$$

e

$$a^z = a^{\log_a(x \cdot y)} = x \cdot y.$$

Poichè è unico il numero z tale che $a^z = x \cdot y$, si ottiene la proprietà 1).

Logaritmi

Vale poi la formula di cambiamento di base dei logaritmi:

$$\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}.$$

Dimostrazione: posto $y = \log_a b$ e $x = \log_c b$, si ha che $a^y = b$ e $c^x = b$, quindi $c^x = a^y$.

Calcoliamo il logaritmo in base a di entrambi i membri. Otteniamo

$$\log_a(c^x) = \log_a(a^y).$$

Applicando la proprietà 2) del lucido precedente, otteniamo

$$x \cdot \log_a c = y \cdot \log_a a = y.$$

Sostituendo a x ed y le relazioni iniziali, si ha

$$\log_c b \cdot \log_a c = \log_a b.$$

Logaritmi

Esercizio: risolvere le seguenti equazioni

1. $\log_x 64 = 6$

2. $\log_7(x) = \frac{1}{3}$

3. $\log_{\sqrt{2}}(x) = \frac{2}{3}$

4. $\log_x(x^2) = 1$

5. $\log_{2x}(x^2) = 3$

Valore assoluto

Dato un numero reale x , si definisce il **valore assoluto** di x nel modo seguente

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Vale la proprietà:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

per ogni coppia di numeri reali x e y .