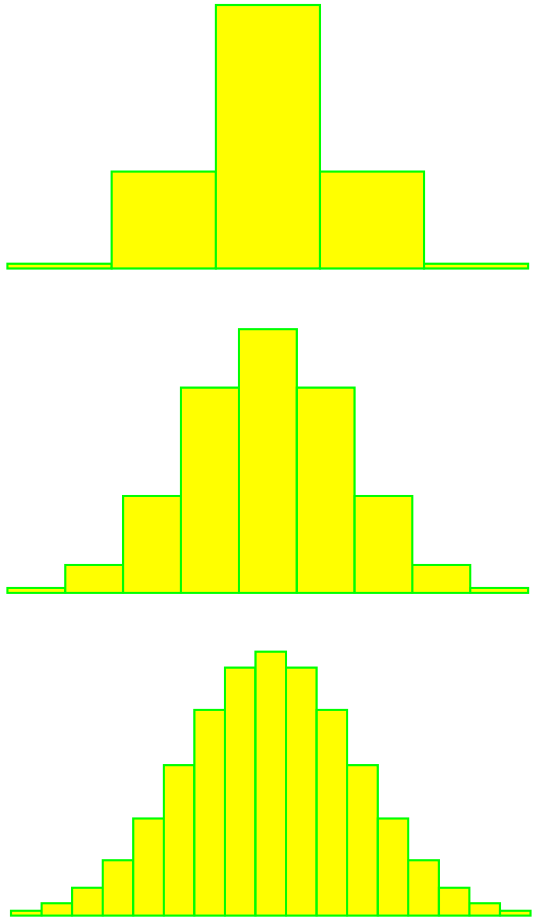
Distribuzione Normale

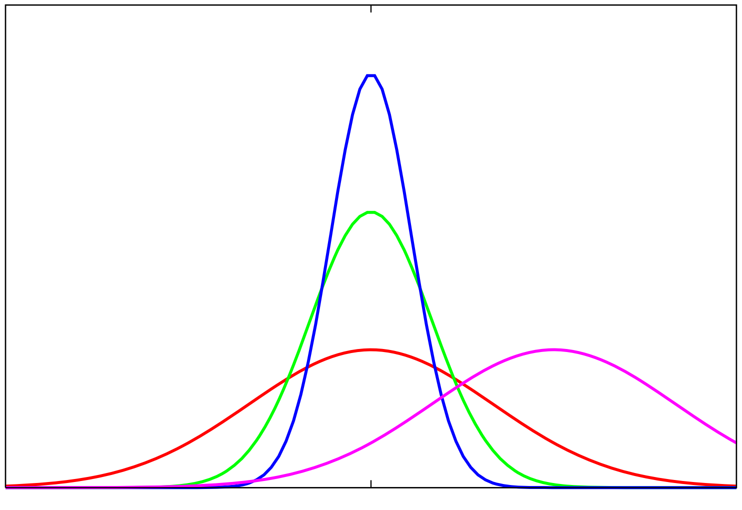


- istogramma delle frequenze di un insieme di misure relative a una grandezza che può variare con continuità
- popolazione molto numerosa, costituita da una quantità praticamente illimitata di individui (popolazione infinita)
- area dell'istogramma uguale a 1 (normalizzata)
- aumentando il numero di intervallini $n = 5, 9, 17, \ldots$ l'istogramma tende a stabilizzarsi intorno a una forma limite: la curva di distribuzione delle frequenze
- nel caso in figura: $y = ae^{-b(x-c)^2}$ distribuzione normale o gaussiana

Distribuzione Normale

Curve Gaussiane

$$y = ae^{-b(x-c)^2}$$



Se la distribuzione è di tipo gaussiano con

- *media aritmetica* μ
- *deviazione standard* σ

si ha

$$a = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \quad b = \frac{1}{2\sigma^2} \quad c = \mu$$

La corrispondente curva normale sarà

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

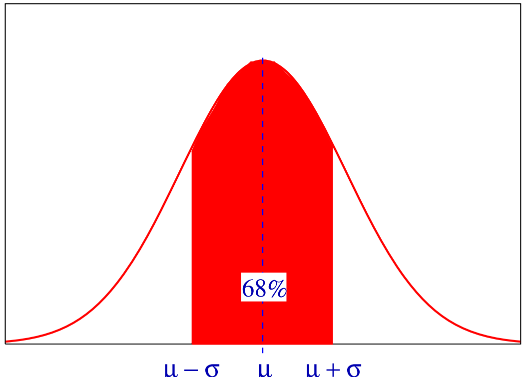
Curva normale standardizzata:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \mu = 0\,,\,\sigma = 1$$

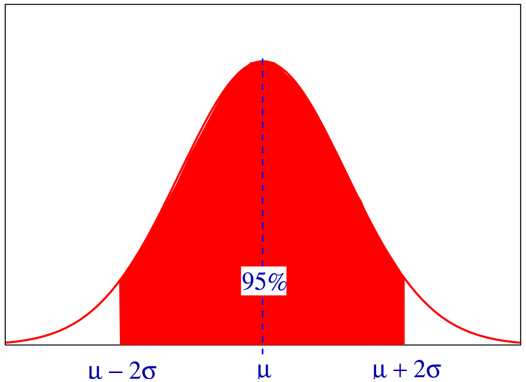
Distribuzione Normale

valori di u	Nell'intervallo $[\mu - u\sigma, \mu + u\sigma]$	Fuori dell'intervallo $[\mu - u\sigma, \mu + u\sigma]$	Nell'intervallo $[\mu + u\sigma, +\infty)$
0	0	1	$0,5$
$0,2$	$0,1586$	$0,8414$	$0,4207$
$0,4$	$0,3108$	$0,6892$	$0,3446$
$0,6$	$0,4514$	$0,5486$	$0,2743$
$0,8$	$0,5762$	$0,4238$	$0,2119$
1	$0,6826$	$0,3174$	$0,1587$
$1,2$	$0,7698$	$0,2302$	$0,1151$
$1,4$	$0,8384$	$0,1616$	$0,0808$
$1,6$	$0,8904$	$0,1096$	$0,0548$
$1,8$	$0,9282$	$0,0718$	$0,0359$
2	$0,9544$	$0,0456$	$0,0228$
$2,2$	$0,9722$	$0,0278$	$0,0139$
$2,4$	$0,9836$	$0,0164$	$0,0082$
$2,6$	$0,9906$	$0,0094$	$0,0047$
$2,8$	$0,9950$	$0,0050$	$0,0025$
3	$0,9974$	$0,0026$	$0,0013$
$3,2$	$0,9986$	$0,0014$	$0,0007$

Fissati due valori x_0, x_1 sull'asse delle ascisse, l'area sottesa dal grafico sull'intervallo $[x_0, x_1]$ rappresenta la porzione di misure che cadono nell'intervallo considerato.



Nell'intervallo $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ cade circa il 68% delle misure



Nell'intervallo $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ cade circa il 95% delle misure

Distribuzione Normale – Esercizi

Esercizio 1. Supponendo che la distribuzione dei pesi degli individui di una popolazione sia gaussiana con media $\mu = 61\,\mathrm{Kg}$ e deviazione standard *(scarto quadratico medio)* $\sigma = 5\,\mathrm{Kg}$,

(a) scrivere l'equazione della gaussiana relativa ai pesi di tale popolazione;

(b) calcolare la percentuale di individui il cui peso è compreso tra $59\,\mathrm{Kg}$ e $63\,\mathrm{Kg}$.

Distribuzione Normale – Esercizi

Esercizio 2. Le altezze h di un gruppo di reclute sono distribuite con buona approssimazione secondo una curva gaussiana con media $\mu = 170\,\text{cm}$ e deviazione standard *(scarto quadratico)* $\sigma = 5\,\text{cm}$. Le divise sono disponibili in 5 taglie:

1. per individui di altezza $\leq 161\,\text{cm}$
2. per individui di altezza compresa tra 161 e 167 cm
3. per individui di altezza compresa tra 167 e 173 cm
4. per individui di altezza compresa tra 173 e 179 cm
5. per individui di altezza $> 179\,\text{cm}$.

Stimare il numero delle divise delle varie taglie sapendo che le reclute sono 750.

Distribuzione Normale – Esercizi

Soluzione: si tratta di stimare la percentuale di reclute che cade in ciascuna delle quattro differenti classi di altezza:

1. per $h \leq 161 = 170 - 1.8\,\sigma \;\Rightarrow\;$ 3.6% (27 reclute)
2. per $161 < h \leq 167 \;\Rightarrow\; h \in (170 - 1.8\,\sigma\,,\, 170 - 0.6\,\sigma] \;\Rightarrow\;$ 23.8% ($\simeq$ 179 reclute)
3. per $167 < h \leq 173 \;\Rightarrow\; h \in (170 - 0.6\,\sigma\,,\, 170 + 0.6\,\sigma] \;\Rightarrow\;$ 45.1% ($\simeq$ 338 reclute)
4. per $173 < h \leq 179 \;\Rightarrow\; h \in (170 + 0.6\,\sigma\,,\, 170 + 1.8\,\sigma] \;\Rightarrow\;$ 23.8% ($\simeq$ 179 reclute)
5. per $h > 179 = 170 + 1.8\,\sigma \;\Rightarrow\;$ 3.6% (27 reclute)

Tabella Curva Gaussiana

valori di u	Nell'intervallo $[\mu - u\sigma, \mu + u\sigma]$	Fuori dell'intervallo $[\mu - u\sigma, \mu + u\sigma]$	Nell'intervallo $[\mu + u\sigma, +\infty)$
0	0	1	$0,5$
$0,2$	$0,1586$	$0,8414$	$0,4207$
$0,4$	$0,3108$	$0,6892$	$0,3446$
$0,6$	$0,4514$	$0,5486$	$0,2743$
$0,8$	$0,5762$	$0,4238$	$0,2119$
1	$0,6826$	$0,3174$	$0,1587$
$1,2$	$0,7698$	$0,2302$	$0,1151$
$1,4$	$0,8384$	$0,1616$	$0,0808$
$1,6$	$0,8904$	$0,1096$	$0,0548$
$1,8$	$0,9282$	$0,0718$	$0,0359$
2	$0,9544$	$0,0456$	$0,0228$
$2,2$	$0,9722$	$0,0278$	$0,0139$
$2,4$	$0,9836$	$0,0164$	$0,0082$
$2,6$	$0,9906$	$0,0094$	$0,0047$
$2,8$	$0,9950$	$0,0050$	$0,0025$
3	$0,9974$	$0,0026$	$0,0013$
$3,2$	$0,9986$	$0,0014$	$0,0007$

Tabella Curva Gaussiana

aree sottese dalla curva gaussiana sull'intervallo [μ , μ + z σ]

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,10	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,20	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,30	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,40	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,50	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,60	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,70	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,80	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,90	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,00	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,10	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,20	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,30	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,40	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,50	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,60	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,70	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,80	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,90	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,00	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,10	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,20	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,30	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,40	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,50	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,60	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,70	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,80	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,90	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,00	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990

Esercizio 3. Il diametro di certe biglie di acciaio segue una distribuzione gaussiana di media $\mu = 6.2$mm e deviazione standard $\sigma = 0.05$mm. Dire quale è la percentuale di biglie con diametro compreso tra 6.3mm e 6.35mm.

Soluzione: $[6.3\,,\,6.35] = [\mu + 2\sigma, \mu + 3\sigma] \;\Rightarrow\; 2.15\%$

Teorema del Limite Centrale

Problema. Determinare come la media campionaria $\overline{x}$ e la deviazione standard campionaria s misurano la media μ e la deviazione standard σ della popolazione.

È data una popolazione numerica di media μ e deviazione standard σ. Da essa estraiamo dei campioni casuali $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, ..., $\mathcal{C}_i$, ..., ciascuno formato da n individui, con $n > 30$. Possiamo calcolare la media campionaria $\overline{x}_i$ di ciascun campione $\mathcal{C}_i$ ed ottenere così un nuovo insieme numerico, quello delle medie campionarie.

Come si distribuiscono le medie campionarie?

Manifestano una tendenza in un certo senso *universale*, seguendo una *legge generale*, oppure il loro comportamento dipende dalla distribuzione della popolazione?

Teorema del Limite Centrale

Teorema. Sia data una popolazione numerica infinita di media μ e deviazione standard σ da cui vengono estratti dei campioni casuali formati ciascuno da n individui, con n abbastanza grande ($n > 30$). La distribuzione delle medie campionarie tende a una distribuzione gaussiana di media $\mu_{\overline{x}} = \mu$ e deviazione standard $\sigma_{\overline{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

In altre parole, anche in una popolazione che non segue il modello gaussiano, le medie campionarie, se calcolate su campioni abbastanza grandi, tendono a distribuirsi secondo una legge gaussiana.

Tabella Curva Gaussiana

aree sottese dalla curva gaussiana sull'intervallo [μ , μ + z σ]

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,10	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,20	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,30	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,40	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,50	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,60	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,70	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,80	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,90	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,00	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,10	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,20	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,30	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,40	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,50	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,60	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,70	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,80	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,90	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	**0,4750**	0,4756	0,4761	0,4767
2,00	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,10	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,20	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,30	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,40	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,50	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	**0,4951**	0,4952
2,60	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,70	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,80	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,90	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,00	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990

Intervalli di Confidenza

Come si utilizza il teorema del limite centrale?

Supponiamo di avere un campione casuale abbastanza grande.
Calcoliamo la *media campionaria* $\overline{x}$.

La distribuzione delle medie campionarie è gaussiana, quindi:

- il 99% dei dati cade nell'intervallo $[\mu - 2.58\,\sigma_{\overline{x}}\,,\, \mu + 2.58\,\sigma_{\overline{x}}]$, cioè per il 99% dei campioni:

$$\mu - 2.58\,\sigma_{\overline{x}} \le \overline{x} \le \mu + 2.58\,\sigma_{\overline{x}}$$

- il 95% dei dati cade nell'intervallo $[\mu - 1.96\,\sigma_{\overline{x}}\,,\, \mu + 1.96\,\sigma_{\overline{x}}]$, cioè per il 95% dei campioni:

$$\mu - 1.96\,\sigma_{\overline{x}} \le \overline{x} \le \mu + 1.96\,\sigma_{\overline{x}}$$

- ...

Intervalli di Confidenza

Lette in termini di μ, le disuguaglianze precedenti definiscono gli intervalli di confidenza per la media μ della popolazione:

- intervallo di confidenza al 99%: $\overline{x} - 2.58\,\sigma_{\overline{x}} \le \mu \le \overline{x} + 2.58\,\sigma_{\overline{x}}$
- intervallo di confidenza al 95%: $\overline{x} - 1.96\,\sigma_{\overline{x}} \le \mu \le \overline{x} + 1.96\,\sigma_{\overline{x}}$
- ...

L'ampiezza degli intervalli di confidenza è espressa in funzione di

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

che dipende dalla deviazione standard, incognita, della popolazione.