

Massimi e Minimi Assoluti di una Funzione su $[a, b]$

Problema: determinare massimo e minimo assoluti di una funzione assegnata f su un intervallo dato $[a, b]$.

1. Stabilire se la funzione è continua. Se lo è, essa ha certamente massimo e minimo assoluti in $[a, b]$ (per il Teorema di Weierstrass).
2. Stabilire se la funzione è derivabile e trovare gli eventuali punti in cui non è derivabile.
3. I candidati punti di massimo di una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ sono i seguenti:
 - gli estremi dell'intervallo: a, b ;
 - gli eventuali punti $z \in (a, b)$ in cui la funzione non è derivabile; indichiamo con A questo insieme;
 - gli eventuali punti $\bar{x} \in (a, b)$ in cui la funzione è derivabile e $f'(\bar{x}) = 0$; indichiamo con B tale insieme.

Massimi e Minimi Assoluti di una Funzione su $[a, b]$

4. Il valore massimo (assoluto) è il massimo tra questi valori:

$$f(a), \quad f(b), \quad f(z) \text{ per } z \in A, \quad f(\bar{x}) \text{ per } \bar{x} \in B$$

5. I punti di massimo sono i valori di x tali che $f(x)$ è uguale al valore massimo.

6. Il valore massimo è unico. I punti di massimo non sono necessariamente unici.

Analogamente per i punti di minimo e il valore minimo.

Esercizi

Esercizio 1. Determinare massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$$

nell'intervallo $[0, 2]$.

Esercizio 2. Determinare massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x) = \frac{2 - 2x}{x^2 + 3}$$

nell'intervallo $[-3, 0]$.

Esercizi

Esercizio 3. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{2+k-x} & \text{se } -1 \leq x \leq 1, \\ x^2 + 2 & \text{se } 1 < x \leq 3. \end{cases}$$

- Determinare per quale valore di k la funzione f è continua nel punto $x = 1$.
- Per tale valore di k la funzione f è derivabile nel punto $x = 1$?
- Per il valore di k per cui la funzione è continua, trovare i punti di massimo e minimo assoluti di f sul suo dominio di definizione, specificandone l'ascissa e l'ordinata.

Esercizi

Soluzione dell'Esercizio 3:

- $k = 1 + \ln 3$
- Per $k = 1 + \ln 3$ la funzione f non è derivabile nel punto $x = 1$.
- I candidati punti di massimo e minimo assoluti di f in $[-1, 3]$ sono gli estremi $x = -1$, $x = 3$ e il punto di non derivabilità $x = 1$ (non ci sono punti critici di f in $(-1, 3)$). Poiché $f(-1) = 3e^2$, $f(3) = 11$, $f(1) = 3$, concludiamo che il massimo assoluto di f in $[-1, 3]$ vale $3e^2$ ed è assunto in $x = -1$, mentre il minimo assoluto di f in $[-1, 3]$ vale 3 ed è assunto in $x = 1$. In altre parole, c'è un solo punto di massimo assoluto di coordinate $(-1, 3e^2)$ e un solo punto di minimo assoluto di coordinate $(1, 3)$.