

Derivabilità e Continuità

Derivabilità $\Rightarrow$ Continuità :

se f è derivabile in x_0 , allora f è continua in x_0 .

Infatti, per l'ipotesi di derivabilità $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.

Consideriamo l'uguaglianza:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \quad \text{per } x \neq x_0.$$

Passando al limite, si ricava la continuità in x_0 :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0).$$

Continuità $\nRightarrow$ Derivabilità :

1. $f(x) = |x|$ (punto angoloso) 2. $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$ (punto cuspidale)

Queste funzioni sono continue, ma non sono derivabili in $x = 0$.

Esercizi

- 1.** Date le funzioni $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2x - 1$,
- (a)** dire quanto vale $f \circ g$, qual è il suo insieme di definizione e quanto vale la sua derivata;
 - (b)** dire quanto vale $g \circ f$, qual è il suo insieme di definizione e quanto vale la sua derivata.
- 2.** Date le funzioni $f(x) = 2x - 5$ e $g(x) = \ln(x + 2)$,
- (a)** dire quanto vale $f \circ g$, qual è il suo insieme di definizione e quanto vale la sua derivata;
 - (b)** dire quanto vale $g \circ f$, qual è il suo insieme di definizione e quanto vale la sua derivata.

Esercizi

3. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione

$$f(x) = \ln(2x + 1)$$

nel punto $x = 2$.

4. Calcolare il coefficiente angolare m della retta tangente al grafico della funzione

$$g(x) = \frac{\ln(x + 1)}{2x^2 + 3}$$

nel punto $x = 0$.

Esercizi

5. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 + 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

studiarne continuità e derivabilità.

6. Determinare i valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in modo tale che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + 2\beta - 1 & \text{per } x \geq 0 \\ (\beta + 1)e^x & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

sia continua e derivabile in $x = 0$.