

Ampliamento di \mathbb{R}

Per $c \in \mathbb{R}$ definiamo le seguenti operazioni:

- $+\infty + c = +\infty, \quad -\infty + c = -\infty$

Questo significa che qualunque sia la funzione f che per $x \rightarrow x_0$ tende a $+\infty$, e qualunque sia la funzione g che per $x \rightarrow x_0$ tende a c , allora $f + g$ per $x \rightarrow x_0$ tende a $+\infty$. Analogamente per $-\infty$.

- $+\infty + \infty = +\infty, \quad -\infty - \infty = -\infty$

- $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty, \quad (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty, \quad (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$

- $\frac{c}{\pm\infty} = 0$

- se inoltre $c \neq 0$,

$$(+\infty) \cdot c = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0 \\ -\infty & \text{se } c < 0 \end{cases} \quad (-\infty) \cdot c = \begin{cases} -\infty & \text{se } c > 0 \\ +\infty & \text{se } c < 0 \end{cases}$$

Operazioni sui Limiti

Il limite della somma, differenza, prodotto, quoziente di due funzioni risulta rispettivamente uguale alla somma, differenza, prodotto, quoziente (se il denominatore è diverso da zero) dei due limiti, purché non sia una delle **forme indeterminate**.

Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \beta \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, allora:

- **somma:** $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \alpha + \beta$ (tranne nel caso $+\infty - \infty$)
- **prodotto:** $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \alpha \cdot \beta$ (tranne nel caso $\pm\infty \cdot 0$)
- **quoziente:** $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$ (tranne nei casi $\frac{0}{0}$ e $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$)

Le stesse proprietà valgono nei casi $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$ oppure $x \rightarrow x_0^+$, $x \rightarrow x_0^-$.

Forme Indeterminate

Restano indeterminate le operazioni:

$$+\infty - \infty, \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0}$$

Cosa significa per esempio che $\frac{0}{0}$ è una forma indeterminata?

Significa che se $f(x)$ e $g(x)$ tendono a 0 per $x \rightarrow x_0$, da questa unica informazione **NON** si può dedurre qual è il comportamento di $\frac{f(x)}{g(x)}$ al tendere di x a x_0 .

Esempio: consideriamo $f(x) = x$, $g(x) = x^3$, $h(x) = 2x$.

Si ha $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$.

Tuttavia, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{f(x)} = 2$.

Limite di un Polinomio all'Infinito

Il comportamento all'infinito di un polinomio è determinato dal termine di grado massimo.

Esempi:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^3}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^4 + x^3 - x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^4 \cdot \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^4 = -\infty$$

Limite di una Funzione Razionale all'Infinito

Dati due polinomi di grado m e n

$$P(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$$
$$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_m x^m}{b_n x^n}$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_m x^m}{b_n x^n}$$

Esercizio

Calcolare i seguenti limiti:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 + 5x + 3}{7x^3 - x^2 + 11} = \frac{4}{7}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 5x^2 + 3}{x^5 - 3x^4 + 2x^2} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^7 + 10x - 8}{x^2 + 3x + 8} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x} + 5e^x}{2e^{3x} - e^{2x} + 4} = \frac{1}{2}$

(si può risolvere ponendo $t = e^x$)

Altri Limiti Fondamentali

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, a > 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^p}{x^n} = 0 \quad \forall p, n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n (\ln x)^p = 0 \quad \forall p, n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

Esercizio. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 2^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^9 \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{e^t - 1}{t} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(x+1)}{x} \cdot \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

Funzioni Continue

Continuità in un punto: una funzione f si dice continua in un punto x_0 se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

cioè,

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Continuità in un intervallo: una funzione f è continua in un intervallo $[a, b]$ se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \forall x_0 \in (a, b), \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b).$$

Graficamente: una funzione definita su un intervallo è continua se è possibile disegnarne il grafico con un tratto *continuo*, senza staccare la penna dal foglio.

Funzioni Continue – Operazioni

Dalle proprietà delle operazioni sui limiti segue che la **somma**, il **prodotto** e il **quoziente** di funzioni continue sono funzioni continue.

Se f e g sono continue in x_0 , si ha:

- $f + g$ è continua in x_0 , cioè, $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = f(x_0) + g(x_0)$.
- $f \cdot g$ è continua in x_0 , cioè, $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)] = f(x_0)g(x_0)$.
- se g è diversa da zero vicino a x_0 , $\frac{f}{g}$ è continua in x_0 , cioè,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}.$$

Funzione inversa: se f è continua e invertibile, allora anche la *funzione inversa* f^{-1} è continua.

Funzioni Continue – Esempi

Le seguenti funzioni sono **continue** nei rispettivi **campi di esistenza**:

1. la funzione valore assoluto $|x|$
2. le funzioni potenza ad esponente reale x^b
3. i polinomi $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$
4. le funzioni razionali (cioè, quozienti di due polinomi)
5. le funzioni esponenziali a^x e le loro inverse (le funzioni logaritmiche $\log_a x$)
6. ...

Esempio

Calcolare $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^3 + x^2 + 1}{x - 1}$.

La funzione $f(x) = \frac{3x^3 + x^2 + 1}{x - 1}$ è una funzione razionale fratta, quindi è continua in tutti i punti dove è definita, cioè in $\mathbb{R} - \{1\}$. Pertanto

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^3 + x^2 + 1}{x - 1} = \frac{3 \cdot 2^3 + 2^2 + 1}{2 - 1} = 29.$$

Attenzione: NON usare la regola dei termini di grado massimo! La regola vale **solo** per il limite di una funzione razionale fratta per $x \rightarrow +\infty$ o per $x \rightarrow -\infty$!

Quanto vale invece $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 + x^2 + 1}{x - 1}$?

Limite di Funzione Composta

Siano f e g due funzioni per cui abbia senso $f \circ g$. Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$$

e che f sia **continua** in L . Allora si ha che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right).$$

Esempi: (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \log\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) = \log 1 = 0$

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4x+1}{x}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x+1}{x}} = \sqrt{4} = 2$

Continuità della Funzione Composta

Supponiamo che:

- g continua in x_0 , cioè, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$
- f continua in $y_0 = g(x_0)$, cioè, $\lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = f(y_0)$

Allora $f \circ g$ è continua in x_0 , cioè,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(g(x_0)).$$

Esempi: le funzioni $f_1(x) = \sqrt[3]{7 + e^x}$, $f_2(x) = \log_{10}(9 + e^{1-x})$ sono continue dove sono definite. Pertanto, ad esempio,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{7 + e^x} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \log_{10}(9 + e^{1-x}) = 1$$

Esercizi sulle Funzioni Continue

Esercizio 1. Stabilire se le seguenti funzioni sono continue in \mathbb{R} :

- $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{per } x \leq 1 \\ |x| + 2 & \text{per } x > 1 \end{cases}$

- $g(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \end{cases}$

- $h(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \end{cases}$

Esercizi sulle Funzioni Continue

Esercizio 2. Determinare per quali valori del parametro k la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 3x^3 + x + 2 - k & \text{per } x \leq 0 \\ \sqrt{x^4 + 1} & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

è continua in tutto il suo insieme di definizione.

Esercizio 3. Determinare per quali valori del parametro k la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^5 - 3k & \text{per } x < 1 \\ 2k e^{x-1} & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$$

è continua in tutto il suo insieme di definizione.