Studio Qualitativo di Funzione

Reperire un certo numero di informazioni per descrivere a livello qualitativo l'andamento del grafico di una funzione f

1. campo di esistenza (cioè, l'insieme di definizione)
2. segno: per quali x si ha $f(x) \geq 0$?
3. intersezioni con gli assi: $(0, f(0))$; per quali x si ha $f(x) = 0$
4. comportamento agli estremi del campo di esistenza
5. continuità
6. monotonia
7. massimi e minimi
8. grafico qualitativo

Campo di Esistenza

Il campo di esistenza è l'insieme di tutti i punti nei quali la funzione è definita.

Nel caso di una funzione composta si determina, caso per caso, tenendo conto degli insiemi di definizione delle funzioni base con le quali la funzione è stata costruita.

Esempio: data la funzione $f(x) = \dfrac{1}{\ln(4 - x^2)}$

- il logaritmo è definito per

$$4 - x^2 > 0 \;\Leftrightarrow\; x \in (-2, 2)$$

- il denominatore deve essere diverso da zero

$$\ln(4 - x^2) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; 4 - x^2 \neq 1 \;\Leftrightarrow\; x \neq \pm\sqrt{3}$$

Il campo di esistenza di f è $(-2, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 2)$.

Comportamento agli Estremi

Se il campo di esistenza D è costituito dall'unione di più intervalli (limitati o illimitati), occorre prendere in considerazione separatamente gli estremi di ognuno di questi intervalli.

- Se gli estremi appartengono a D, si calcola semplicemente il valore della funzione in tali punti.

  Esempi: $f(x) = \sqrt{x}, \quad D = [0, +\infty), \quad f(0) = \sqrt{0} = 0$

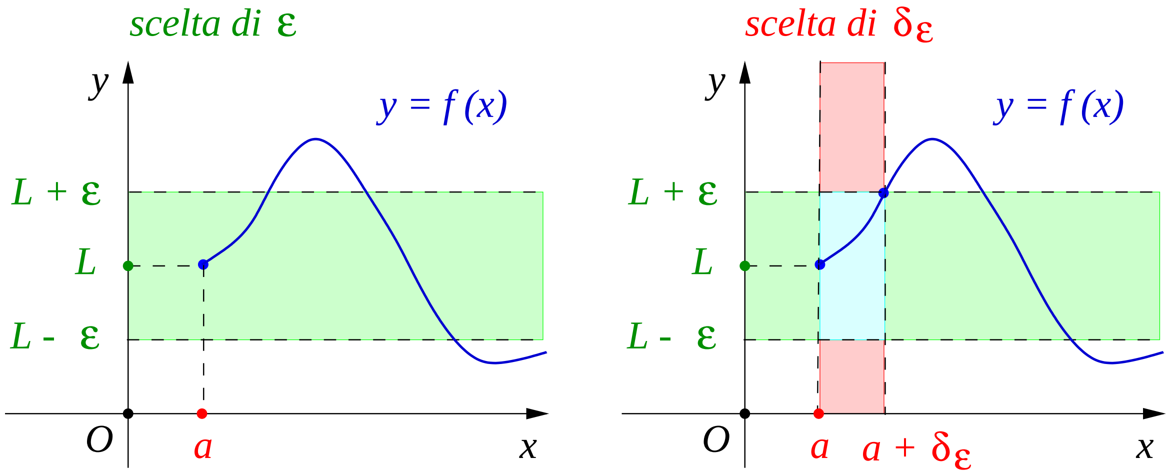
  $f(x) = \sqrt{x(1-x)}, \quad D = [0, 1], \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 0$

- Se gli estremi non appartengono a D, si introduce il concetto di limite.

  Esempi: $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2}$

Limite Destro Finito

Quando la variabile x assume valori "vicini" ad a (sempre maggiori di a), i corrispondenti valori di $f(x)$ si avvicinano sempre più al valore L.



limite destro finito

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

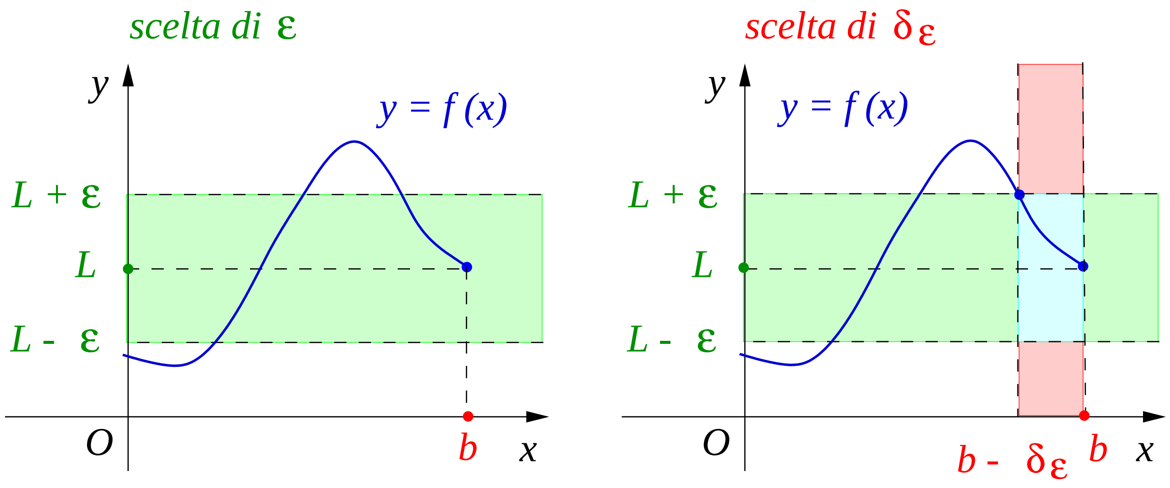
Si dice che $f(x)$ tende al limite L per x che tende ad a da destra se:

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che $|f(x) - L| < \varepsilon$ per ogni $x \in (a, a + \delta_\varepsilon)$.

Esempi: (1) $\lim_{x \to 1^+} \sqrt{x-1} = 0$, (2) $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = 1$.

Limite Sinistro Finito

Quando la variabile x assume valori "vicini" a b (sempre minori di b), i corrispondenti valori di $f(x)$ si avvicinano sempre più al valore L.



limite sinistro finito

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = L$$

Si dice che $f(x)$ tende al limite L per x che tende a b da sinistra se:

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che $|f(x) - L| < \varepsilon$ per ogni $x \in (b - \delta_\varepsilon, b)$.

Esempi: (1) $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} \sqrt{1-x} = 0$, (2) $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$.

Limite Finito per $x \to x_0$

Se la funzione possiede sia il limite destro che il limite sinistro nel punto x_0 e se entrambi sono uguali al valore L, si dice che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \qquad \textbf{(limite finito)}$$

Quando la variabile x assume valori "vicini" a x_0 (diversi da x_0), i corrispondenti valori di $f(x)$ sono "vicini" al valore L.

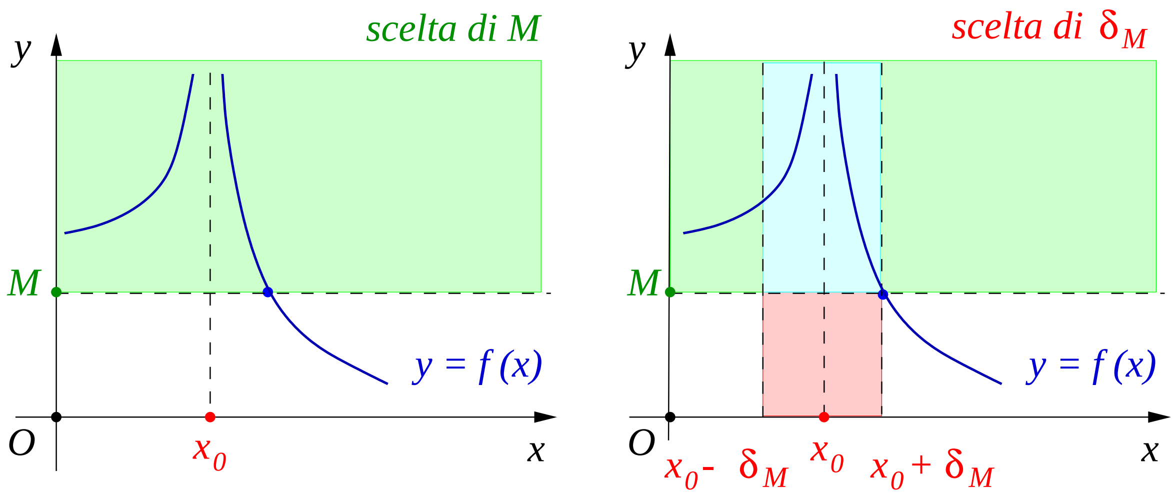
Si dice che $f(x)$ tende al limite L per x che tende ad x_0 se:

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che
$|f(x) - L| < \varepsilon$ per ogni $x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon)$ con $x \neq x_0$.

Esempi: (1) $\lim_{x \to 1} (2x + 1) = 3$, (2) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

Limite Infinito

Quando la variabile x assume valori "vicini" ad x_0 (diversi da x_0), i corrispondenti valori di $f(x)$ crescono arbitrariamente.



limite infinito

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

Si dice che $f(x)$ tende a $+\infty$ per x che tende ad x_0 se:

per ogni $M > 0$ esiste un $\delta_M > 0$ tale che

$f(x) > M$ per ogni $x \in (x_0 - \delta_M, x_0 + \delta_M)$ con $x \neq x_0$.

Esempi: (1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$

Osservazioni sui Limiti per $x \to x_0$

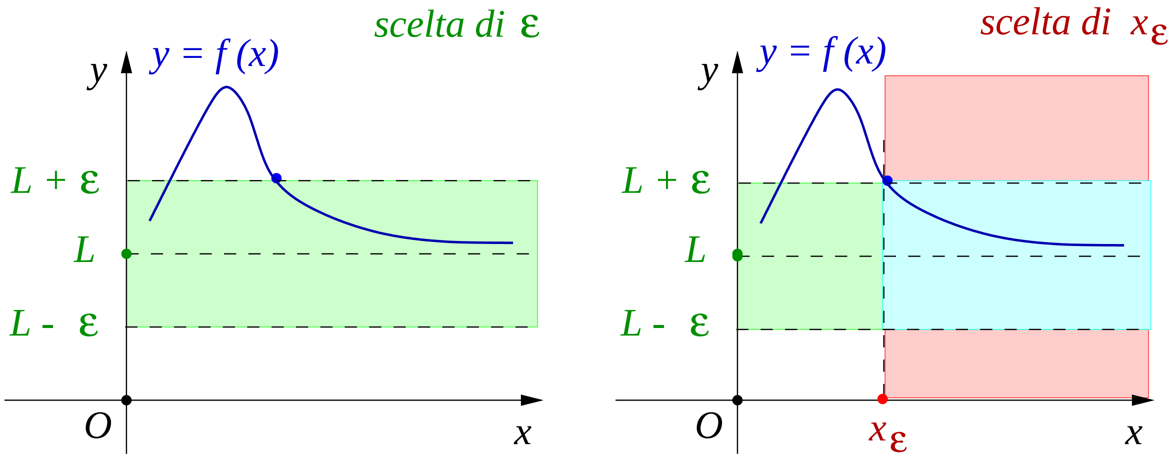
Poiché nella definizione di limite si richiede $x \neq x_0$, non ha alcuna importanza l'eventuale valore assunto dalla funzione nel punto x_0:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{per } x \neq 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \end{cases} \qquad f(0) = 1\,, \text{ ma } \lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases} \qquad g(0) = 0\,, \text{ ma } \lim_{x \to 0} g(x) = +\infty$$

Limite Finito per $x \to +\infty$

Quando la variabile x cresce arbitrariamente, i corrispondenti valori di $f(x)$ sono sempre più "vicini" al valore L.



limite finito

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

Si dice che $f(x)$ tende al limite L per x che tende ad $+\infty$ se:

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $x_\varepsilon > 0$ tale che $|f(x) - L| < \varepsilon$ per ogni $x \in (x_\varepsilon, +\infty)$.

Esempi: (1) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} = 1\,,$ (2) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0.$

Il Limite Può Non Esistere

Il limite di una funzione può non esistere:

- $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, $x \neq 0$. Non esiste il limite per $x \to 0$.

  Infatti, il limite destro e limite sinistro esistono, ma sono diversi:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1\,, \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1\,.$$

- $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$. Non esiste il limite per $x \to 0$.

  Infatti, i limiti destro e sinistro sono infiniti di segno opposto:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty\,.$$

Il Limite Può Non Esistere

- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \in [2n, 2n+1), \ \ n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{per } x \in [2n+1, 2n+2), \ \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

  Non esiste il limite per $x \to +\infty$.

Alcuni Limiti da Ricordare

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\infty & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < a < 1 \\ +\infty & \text{se } a > 1 \end{cases}$ $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \\ 0 & \text{se } a > 1 \end{cases}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} -\infty & \text{se } 0 < a < 1 \\ +\infty & \text{se } a > 1 \end{cases}$

- $\lim\limits_{x\to0^+} \log_a x = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \\ -\infty & \text{se } a > 1 \end{cases}$

Operazioni sui Limiti

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = \beta \in \mathbb{R}$, allora si ha:

- somma: $\lim_{x \to x_0} \Big[f(x) + g(x) \Big] = \alpha + \beta$
- prodotto: $\lim_{x \to x_0} \Big[f(x) \cdot g(x) \Big] = \alpha \cdot \beta$
- quoziente: se $\beta \neq 0$, $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$

Le stesse proprietà valgono nei casi $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ oppure $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$.

Operazioni sui Limiti

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, allora si ha:

- somma: $\lim_{x \to x_0} \left[f(x) + g(x) \right] = +\infty$
- prodotto: se $\alpha \neq 0$, $\lim_{x \to x_0} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ -\infty & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$
- quoziente: $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

  In particolare, si ha che $\lim_{x \to x_0} \dfrac{1}{g(x)} = 0$

Le stesse proprietà valgono nei casi $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ oppure $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$.

Esercizio

Calcolare i seguenti limiti:

- $\lim_{x\to+\infty} -2\left(3+\frac{1}{x}\right) = -6$
- $\lim_{x\to+\infty} \left(2-e^{-x}\right) = 2$
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{2-e^{-x}}{3+\frac{1}{x}} = \frac{2}{3}$
- $\lim_{x\to+\infty} \left(-1+\frac{1}{x}\right)e^{x} = -\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{e^{x}} = 0$