Successioni

Vi sono fenomeni naturali e situazioni concrete che presentano sviluppi significativi in tempi discreti.

Vale a dire è naturale che i controlli per quei dati fenomeni o per quelle date situazioni avvengano ad intervalli di tempo prefissati (di minuti, ore, giorni, anni, . . .).

ESEMPI:

1. aumento dello stipendio di un lavoratore dipendente per effetto degli scatti di anzianità;
2. crescita di un capitale investito ad un tasso fisso di interesse annuo;
3. crescita di una popolazione di cellule;
4. decadimento di una sostanza radioattiva.

Successioni: Progressioni Aritmetiche

Esempio 1: aumento di uno stipendio per effetto degli scatti di anzianità (dalla parte del padrone)

- $S(0) = S$ stipendio all'istante iniziale, al momento dell'assunzione
- scatto annuale di anzianità pari all'1.5% dello stipendio iniziale
- dopo un anno lo stipendio sarà $S(1) = S + \frac{1.5}{100}\,S$
- dopo 2 anni lo stipendio sarà $S(2) = S(1) + \frac{1.5}{100}\,S = S + 2\,\frac{1.5}{100}\,S$
- dopo n anni lo stipendio sarà

$$S(n) = S + n\,\frac{1.5}{100}\,S = S + nd \qquad \left(\text{dove } d = \frac{1.5}{100}\,S\right)$$

Si dice successione una corrispondenza che ad ogni intero n associa un valore $S(n)$. In questo caso

$S(n) = S + n\,d \quad \forall n \in \mathbb{N}$ progressione aritmetica di ragione d

Successioni: Progressioni Geometriche

Esempio 2: aumento di uno stipendio per effetto degli scatti di anzianità (dalla parte del dipendente)

- $C(0) = C$ stipendio all'istante iniziale, al momento dell'assunzione
- scatto annuale di anzianità pari all'1.5% dello stipendio dell'anno precedente
- dopo un anno $C(1) = C + \frac{1.5}{100} C = C\,(1 + \frac{1.5}{100})$
- dopo 2 anni

$$C(2) = C(1) + \frac{1.5}{100} C(1) = C(1)(1 + \frac{1.5}{100}) = C\,(1 + \frac{1.5}{100})^2$$

- posto $q = 1 + \frac{1.5}{100}$, dopo n anni lo stipendio sarà

$C(n) = C\,q^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ progressione geometrica di ragione q

Esercizio

Di una progressione aritmetica sono noti i termini $S(3) = 16$ ed $S(6) = 31$. Trovare la ragione d della progressione e il termine $S(8)$.

Soluzione: poiché $S(6) = S(3) + 3d$, si ha $31 = 16 + 3d$ e dunque $d = 5$ e $S(8) = 31 + 2d = 41$.

Esercizio

È data una successione di sfere $S(0)$, $S(1)$, $S(2)$, ...
La sfera $S(0)$ ha volume $V(0) = 8\,\mathrm{cm}^3$ e il volume di ciascuna sfera supera di $2\,\mathrm{cm}^3$ il volume della sfera che la precede nella successione.

Esprimete mediante una formula:

- il volume $V(n)$ in cm^3 della generica sfera $S(n)$;
- il raggio $R(n)$ in cm della generica sfera $S(n)$;
- la successione numerica $V(0)$, $V(1)$, $V(2)$, ... è una progressione aritmetica? In caso di risposta affermativa, quale ne è la ragione?
- la successione numerica $R(0)$, $R(1)$, $R(2)$, ... è una progressione aritmetica? In caso di risposta affermativa, quale ne è la ragione?

Esercizio

È data una successione di sfere $S(0)$, $S(1)$, $S(2)$, ...
La sfera $S(0)$ ha volume $V(0) = 8\,\text{cm}^3$ e il volume di ciascuna sfera supera del 6% il volume della sfera che la precede nella successione.

Esprimete mediante una formula:

- il volume $V(n)$ in cm^3 della generica sfera $S(n)$;
- il raggio $R(n)$ in cm della generica sfera $S(n)$;
- la successione numerica $V(0)$, $V(1)$, $V(2)$, ... è una progressione geometrica? In caso di risposta affermativa, quale ne è la ragione?
- la successione numerica $R(0)$, $R(1)$, $R(2)$, ... è una progressione geometrica? In caso di risposta affermativa, quale ne è la ragione?

Un Modello di Crescita Cellulare

In particolari condizioni, dopo un certo intervallo temporale, una cellula si suddivide in due nuove cellule *(dicotomia della cellula)*. Queste a loro volta raddoppiano dopo un intervallo di tempo uguale al precedente.

Assumendo come unità di misura dei tempi il cosiddetto *tempo di raddoppio*, il processo può essere schematizzato dalla progressione geometrica:

$$K(0) = K_0 , \quad K(n) = 2 \cdot K(n-1) = 2^n \cdot K_0$$

dove $K(n)$ è il numero delle cellule dopo n tempi di raddoppio.

Esercizio. Il tempo necessario per una suddivisione di una cellula è di 5 giorni. Calcolare il numero di cellule dopo 60 giorni partendo da un'unica cellula iniziale.

Soluzione: 60 giorni corrispondono a 12 tempi di raddoppio. Quindi, il numero delle cellule è

$$K(12) = 2^{12} = 4096 \simeq 4000$$

Nota: può essere utile ricordare che $2^{10} = 1024 \simeq 1000$.

Un Modello di Decadimento Radioattivo

Le sostanze radioattive decadono progressivamente. La velocità di decadimento si misura mediante il cosiddetto *semiperiodo* o *tempo di dimezzamento*, che rappresenta il tempo necessario perché il numero degli atomi della sostanza radioattiva risulti dimezzato.

Assumendo come unità di misura dei tempi il *tempo di dimezzamento*, il processo può essere schematizzato dalla progressione geometrica:

$$K(n) = \frac{1}{2} \cdot K(n-1) = \frac{1}{2^n} \cdot K(0)$$

dove $K(n)$ è la quantità di sostanza radioattiva dopo n tempi di dimezzamento a partire da una quantità iniziale $K(0)$.

Esercizio. Dopo quanti tempi di dimezzamento una sostanza radioattiva si è ridotta a $1/4$ (cioè al 25%) della quantità iniziale?

Soluzione: $K(n) = \frac{1}{2^n} K(0) = \frac{1}{4} K(0) \quad \Rightarrow \quad n = 2$

Esercizi

Esercizio 1. Una popolazione cellulare è formata all'istante $t = 0$ da 10^4 cellule aventi tempo di raddoppio $T = 100$ giorni. Dopo quanti giorni la popolazione è pari a 4.000.000 di cellule? Qual è il tempo di raddoppio di una seconda popolazione cellulare che passa da 10^4 a 8.000.000 di cellule in 40 giorni?

Nota: $\log_2 10 \simeq 3.3$

Soluzione:

1. Dopo n tempi di raddoppio ci sono $2^n \cdot 10^4$ cellule; questo numero deve essere uguale a $4 \cdot 10^6$, quindi n soddisfa l'equazione:

$$2^n \cdot 10^4 = 4 \cdot 10^6 \;\Leftrightarrow\; 2^n = 4 \cdot 10^2 \;\Leftrightarrow\; n = \log_2(4 \cdot 10^2),$$

cioè, $n = 2+2\log_2 10 \simeq 8.6$. Quindi, dopo $100 \cdot 8.6 = 860$ giorni si hanno 4.000.000 di cellule.

2. Si ha $2^n \cdot 10^4 = 8 \cdot 10^6$, quindi $n = 3 + 2\log_2 10$. Indicando con x il tempo di raddoppio, si ha $40 = x \cdot (3 + 2\log_2 10)$, da cui si ricava x.

Esercizio 2. In una coltura batterica sono presenti inizialmente N_0 batteri. Il loro numero raddoppia ogni 3 ore. Quanti batteri ci saranno nella coltura dopo 24 ore? Quando il numero di batteri nella coltura sarà pari al 25% della quantità finale?

Soluzione:

1. Si osservi che 24 ore corrispondono a 8 tempi di raddoppio. Pertanto il numero di batteri dopo 24 ore è $2^8 \cdot N_0 = 256 \cdot N_0$.

2. Deve essere $2^n \cdot N_0 = \frac{25}{100} \cdot 256 \cdot N_0$, da cui $n = 6$. Pertanto, il numero di batteri sarà pari al 25% della quantità finale dopo 6 tempi di raddoppio, cioè dopo 18 ore.

Esercizio 3. Un tumore viene diagnosticato quando il suo volume è di circa 10 cm^3. Schematizzando le cellule tumorali come cubetti di lato 10 μm e supponendo che il loro tempo di raddoppio sia di circa 100 giorni, stimare il tempo trascorso dal momento della formazione della prima cellula tumorale.

Nota: 1 μm$=10^{-6}$ m $\quad \log_2 10 \simeq 3.3$

Soluzione:

Si osservi che 10 μm $= 10^{-3}$ cm. Il volume di una cellula è pari a $10^3 \mu\text{m}^3 = 10^{-9}\text{cm}^3$. Pertanto un volume di 10 cm^3 contiene un numero di cellule pari a $\frac{10}{10^{-9}} = 10^{10}$.

Deve essere $2^n = 10^{10}$, da cui $n = 10 \log_2 10$. Quindi, il tempo trascorso dalla formazione della prima cellula tumorale fino al momento in cui il tumore viene diagnosticato è dato da $100 \cdot 10 \log_2 10 \simeq 3300$ giorni.

Esercizio 4. Un materiale radioattivo è caratterizzato da un tempo di dimezzamento pari a 800 anni. Dopo quanto tempo un campione di tale materiale si sarà ridotto del 15%? Qual è il tempo di dimezzamento di un secondo campione che si riduce del 15% in 800 anni?

Soluzione:

1. Indicando con P il peso iniziale del materiale, si deve avere $\frac{1}{2^n}P = \frac{85}{100}P$. Dunque $2^n = \frac{100}{85}$, da cui $n = \log_2 \frac{100}{85}$. Il tempo richiesto è $800 \cdot \log_2 \frac{100}{85}$.

2. Il tempo di dimezzamento del secondo campione è $\frac{800}{\log_2 \frac{100}{85}}$.

Esercizi

Esercizio 5. Un materiale radioattivo è caratterizzato da un tempo di dimezzamento pari a 1000 anni. Dopo quanto tempo un campione di 1 Kg di tale materiale si sarà ridotto del 20%? Dopo quanto tempo un altro campione di 2 Kg di tale materiale si sarà ridotto al 20%?

Soluzione:

Si deve avere $\frac{1}{2^n} \cdot K_0 = \frac{80}{100} K_0$ avendo indicato con K_0 il peso iniziale.
Dunque $2^n = \frac{5}{4}$ e $n = \log_2 \frac{5}{4}$ e il tempo è $1000 \cdot \log_2 \frac{5}{4}$.

Nel secondo caso si deve avere $\frac{1}{2^n} \cdot K_0 = \frac{20}{100} K_0$.
Dunque $2^n = 5$ e $n = \log_2 5$ e il tempo è $1000 \cdot \log_2 5$.

Esercizio 6. Una sostanza radioattiva ha un tempo di dimezzamento T pari a 100 anni. Quanto tempo deve trascorrere affinché di un campione della sostanza rimanga il 50% del quantitativo iniziale?

Soluzione:

Dalla definizione di tempo di dimezzamento segue immediatamente che deve trascorrere un tempo di dimezzamento, cioè 100 anni.

Esercizio 7. Una popolazione cellulare è formata all'istante $t = 0$ da N_0 cellule aventi tempo di raddoppio $T = 10$ giorni. Dopo quanti giorni la popolazione è pari a $8N_0$? Qual è il tempo di raddoppio di una seconda popolazione cellulare che passa da N_0 cellule a $8N_0$ cellule in 10 giorni?

Soluzione:

1. 30 giorni 2. $\frac{10}{3}$ giorni

Esercizio 8. Una popolazione cellulare è formata ad un certo istante da N_0 individui ed è caratterizzata da un tempo di raddoppio pari a 14 giorni. Dopo quanto tempo la popolazione risulterà composta da $10N_0$ individui? Qual è il tempo di raddoppio di un secondo campione che passa da N_0 a $10N_0$ individui in 14 giorni?

Soluzione:

1. $14 \cdot \log_2 10$ giorni
2. $\dfrac{14}{\log_2 10}$ giorni