

Esercizi

1. Tracciare il grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{per } x \leq 0, \\ |x - 1| & \text{per } x > 0. \end{cases}$$

Determinare gli eventuali punti e valori di massimo e minimo assoluti e relativi per $x \in (-\infty, 4]$.

2. Tracciare il grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 - 1| & \text{per } x \leq 1, \\ \ln x & \text{per } x > 1. \end{cases}$$

Determinare gli eventuali punti e valori di massimo e minimo assoluti e relativi per $x \in \mathbb{R}$.

Esercizi

3. Tracciare il grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2 - |x| & \text{per } x \leq 2, \\ \ln(\frac{1}{2}x) & \text{per } x > 2. \end{cases}$$

Determinare gli eventuali punti e valori di massimo e minimo assoluti e relativi per $x \in [-3, +\infty)$.

4. Tracciare il grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 4x^2 & \text{per } x \leq \frac{1}{2}, \\ \ln(2x) & \text{per } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Determinare gli eventuali punti e valori di massimo e minimo assoluti e relativi per $x \in [-1, +\infty)$.

Esercizi

5. Tracciare il grafico qualitativo della funzione

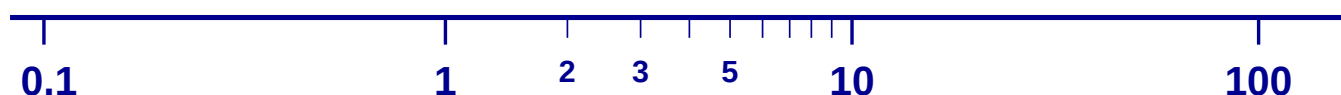
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{per } x \leq 1, \\ -\ln x & \text{per } x > 1. \end{cases}$$

Determinare gli eventuali punti e valori di massimo e minimo assoluti e relativi per $x \in [-2, +\infty)$.

Scale Logaritmiche

Scala Logaritmica:

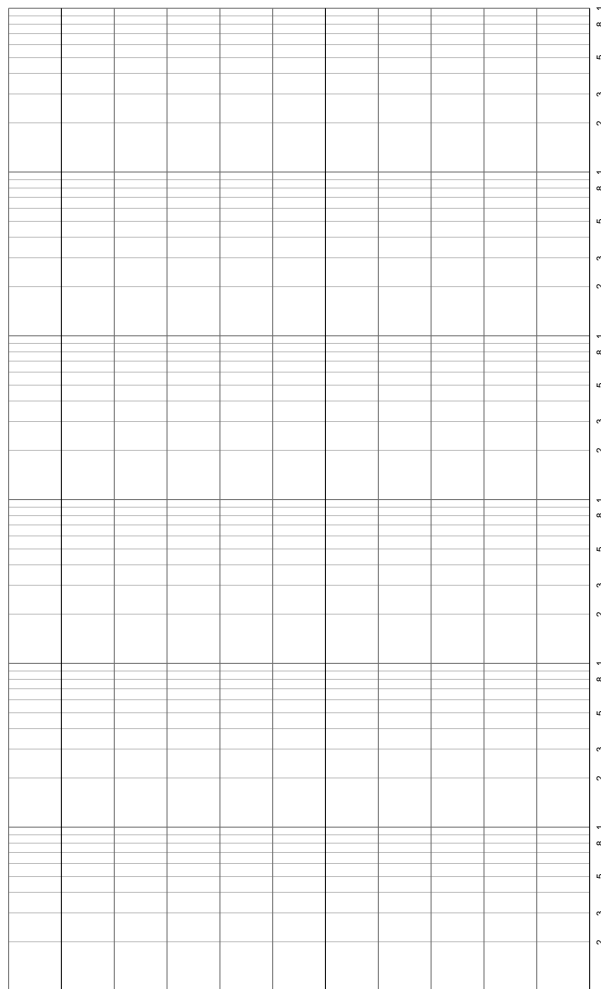
- sull'asse prescelto (ad esempio, l'asse x) si rappresenta il punto di ascissa $1 = 10^0$
- nella direzione positiva si rappresentano, a distanze uguali fra di loro, i punti di ascissa $10^1, 10^2, 10^3, \dots$
- nella direzione negativa si rappresentano, a distanze uguali fra di loro, i punti di ascissa $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \dots$
- i valori intermedi tra una potenza di 10 e la successiva (ad esempio, 2, 3, $\dots$, 9) sono posizionati in corrispondenza dei valori dei rispettivi logaritmi decimali



Applicazioni:

- rappresentare **misure positive** con ordini di grandezza molto diversi fra loro
- linearizzare funzioni esponenziali $y = K \cdot a^x$ (scale semilogaritmiche)
- linearizzare funzioni potenza $y = A \cdot x^b$ (scale logaritmiche)

Carta Semilogaritmica



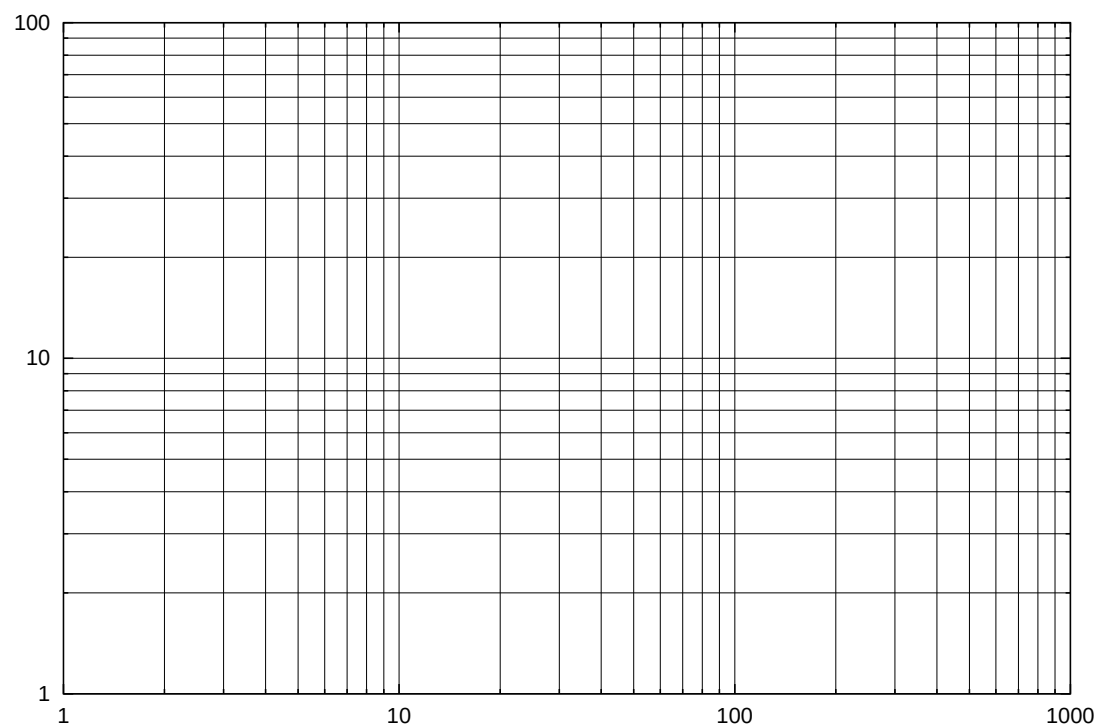
Carta Semilogaritmica:

scala lineare sull'asse delle ascisse X e
scala logaritmica sull'asse delle ordina-
te Y (o viceversa)

Trasformazione di variabili:

$$X = x \quad Y = \log_{10} y$$

Carta Logaritmica



Carta Logaritmica: scala logaritmica sull'asse delle ascisse X e scala logaritmica sull'asse delle ordinate Y

Trasformazione di variabili: $X = \log_{10} x$ $Y = \log_{10} y$

Carte Semilogaritmiche

Data la funzione esponenziale

$$y = K \cdot a^x,$$

passando ai logaritmi decimali e utilizzando le proprietà dei logaritmi, si ottiene

$$\log_{10} y = \log_{10} (K \cdot a^x) \Rightarrow \log_{10} y = \log_{10} K + x \cdot \log_{10} a$$

Ponendo $X = x$ e $Y = \log_{10} y$, si ha

$$Y = \log_{10} K + X \cdot \log_{10} a,$$

che è l'equazione di una retta $y = mx + q$ con coefficiente angolare $m = \log_{10} a$ e intercetta $q = \log_{10} K$.

Carte Logaritmiche

Data la funzione potenza

$$y = K \cdot x^b,$$

passando ai logaritmi decimali e utilizzando le proprietà dei logaritmi, si ottiene

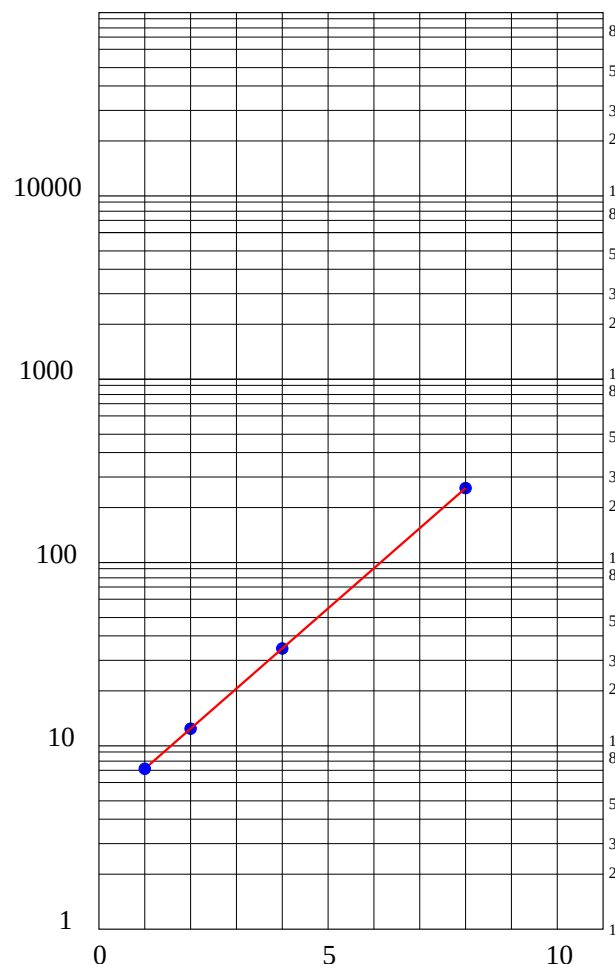
$$\log_{10} y = \log_{10} (K \cdot x^b) \Rightarrow \log_{10} y = \log_{10} K + b \cdot \log_{10} x$$

Ponendo $X = \log_{10} x$ e $Y = \log_{10} y$, si ha

$$Y = \log_{10} K + b \cdot X,$$

che è l'equazione di una retta $y = mx + q$ con coefficiente angolare $m = b$ e intercetta $q = \log_{10} K$.

Carta Semilogaritmica – Esempio



Sono date le coordinate cartesiane di alcuni punti desunti da osservazioni sperimentali:

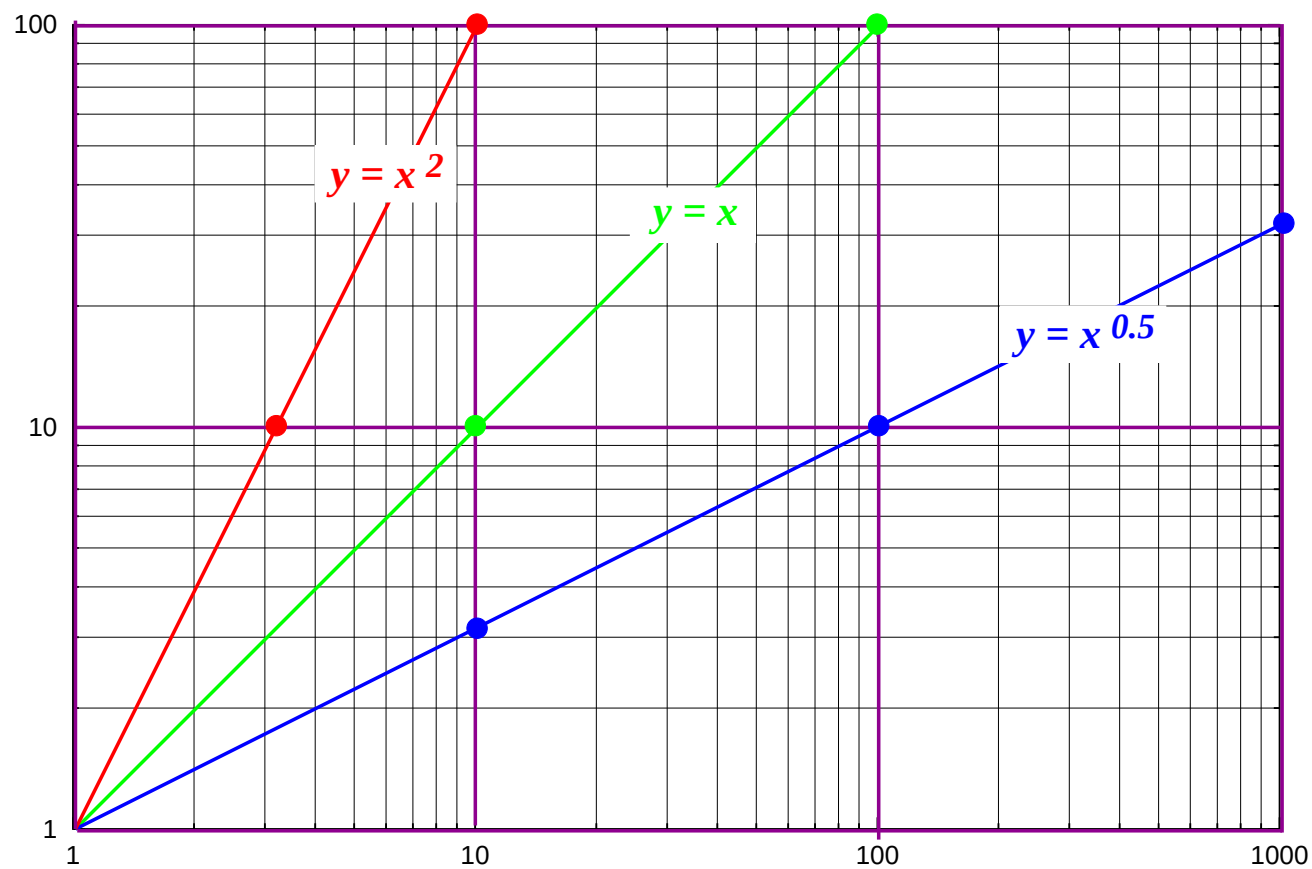
$$A = (1, 7.1) \quad B = (2, 12.1)$$

$$C = (4, 35) \quad D = (8, 288)$$

Rappresentando questi punti su una carta semilogaritmica, osserviamo che risultano praticamente allineati.

Quindi, questi punti appartengono al grafico di una funzione esponenziale

Carta Logaritmica – Esempio



Esercizi

Esercizio 1. (a) In un grafico con scala semilogaritmica è rappresentata la retta di equazione $Y = -\log_{10} 2 + (\log_{10} 3)X$. Trovare il legame funzionale tra x e y , dove $X = x$ e $Y = \log_{10} y$.

(b) Trovare il coefficiente angolare della retta che rappresenta, su tale scala, la funzione $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Dire se tale coefficiente angolare è positivo o negativo.

Soluzione:

(a) Sostituendo le relazioni $X = x$ e $Y = \log_{10} y$ nell'equazione della retta, si ha:

$$\log_{10} y = -\log_{10} 2 + x \cdot \log_{10} 3 = \log_{10} 3^x - \log_{10} 2 = \log_{10} \frac{3^x}{2}$$

$$\text{da cui } y = \frac{3^x}{2}.$$

(b) Prendendo i logaritmi di entrambi i membri si ha:

$$\log_{10} y = \log_{10} \left(\frac{1}{3}\right)^x = x \cdot \log_{10} \frac{1}{3}, \quad \text{da cui } Y = \left[\log_{10} \left(\frac{1}{3}\right) \right] x$$

quindi $m = -\log_{10} 3 < 0$.

Esercizi

Esercizio 2. In un grafico con scala logaritmica (*scala logaritmica sia sull'asse delle ascisse che sull'asse delle ordinate*)

- (a) è rappresentata la retta di equazione $Y = -3X + 5$. Trovare il legame funzionale tra x e y , dove $X = \log_{10} x$ e $Y = \log_{10} y$;
- (b) scrivere l'equazione della retta che rappresenta su tale scala la funzione $y = (\sqrt{2x})^3$.

Soluzione:

- (a) Sostituiamo le relazioni $X = \log_{10} x$ e $Y = \log_{10} y$ nell'equazione della retta. Otteniamo $\log_{10} y = -3 \log_{10} x + 5$, da cui

$$y = 10^{-3 \log_{10} x + 5} = 10^5 (10^{\log_{10} x})^{-3} = \frac{10^5}{x^3}, \quad \text{cioè} \quad y = \frac{100.000}{x^3}.$$

- (b) Prendendo i logaritmi di entrambi i membri si ha:

$$\log_{10} y = \log_{10} (2x)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \log_{10} 2x, \quad \text{quindi la retta è}$$

$$Y = \frac{3}{2}X + \frac{3}{2} \log_{10} 2.$$

Esercizi

Esercizio 3. (a) In un grafico in scala semilogaritmica è rappresentata la retta di equazione $Y = \log_{10} 2 + (\log_{10} 3)X$, dove $X = x$ e $Y = \log_{10} y$. Trovare il corrispondente legame funzionale tra x e y .

(b) Rispondere alla stessa domanda nel caso che sia assegnata su carta logaritmica la retta di equazione $Y = -\log_{10} 5 + 2X$, dove $X = \log_{10} x$ e $Y = \log_{10} y$.

Soluzione:

(a) $\log_{10} y = \log_{10} 2 + x \cdot \log_{10} 3 = \log_{10}(2 \cdot 3^x),$

da cui $y = 2 \cdot 3^x$.

(b) $\log_{10} y = -\log_{10} 5 + 2 \log_{10} x = \log_{10} \frac{x^2}{5},$

da cui $y = \frac{x^2}{5}$.

Esercizi

Esercizio 4. (a) Su carta semilogaritmica è assegnata la retta di equazione $Y = \log_{10} 3 + (\log_{10} 4)X$, dove $X = x$ e $Y = \log_{10} y$. Trovare il corrispondente legame funzionale tra x e y .

(b) Si risponda alla stessa domanda nel caso che sia assegnata su carta logaritmica la retta di equazione $Y = \log_{10} 5 + \frac{3}{2}X$, dove $X = \log_{10} x$ e $Y = \log_{10} y$.

Soluzione:

$$(a) \quad y = 3 \cdot 4^x \qquad (b) \quad y = 5x^{\frac{3}{2}}$$

Esercizi

Esercizio 5. In un grafico con scala semilogaritmica (*scala normale sull'asse delle ascisse e scala logaritmica sull'asse delle ordinate*)

- (a) è rappresentata la retta di equazione $Y = -\log_{10} 5 + (\log_{10} 2)X$.
Trovare il legame funzionale tra x e y , dove $X = x$ e $Y = \log_{10} y$;
- (b) trovare il coefficiente angolare della retta che rappresenta su tale scala la funzione $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$. Dire se tale coefficiente angolare è positivo o negativo.

Soluzione:

- (a) $y = \frac{2^x}{5}$ (b) Il coefficiente angolare è $\log_{10} \frac{3}{5} < 0$.

Esercizi

Esercizio 6. (a) Scegliendo le coordinate logaritmiche opportune (semilogaritmiche o doppiamente logaritmiche) scrivere la retta corrispondente alla funzione $y = \sqrt{2x^5}$.

(b) In queste coordinate quale curva corrisponde alla retta $Y = -2X + 5$?

Soluzione: (a) Le coordinate opportune sono quelle doppiamente logaritmiche. La retta è $Y = \frac{1}{2} \log_{10} 2 + \frac{5}{2}X$.

(b) $y = \frac{10^5}{x^2}$

Esercizio 7. (a) Scegliendo le coordinate logaritmiche opportune (semilogaritmiche o doppiamente logaritmiche) scrivere la retta corrispondente alla funzione $y = \frac{4}{10^{5x}}$.

(b) In queste coordinate quale curva corrisponde alla retta $Y = 3 - 7X$?

Soluzione: (a) Le coordinate opportune sono quelle semilogaritmiche. La retta è $Y = \log_{10} 4 - 5X$.

(b) $y = \frac{10^3}{10^{7x}}$