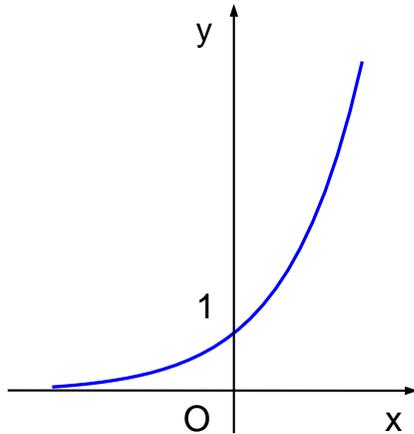
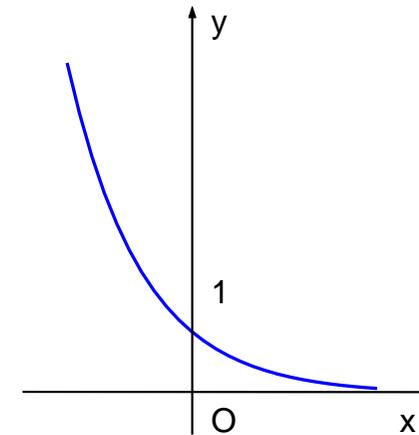


Funzione Esponenziale



$f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty), f(x) = a^x$ con $a > 1$

- $a^0 = 1, a^1 = a$
- $a^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$
- *strettamente crescente:*
 $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$
- se x tende a $+\infty$, a^x tende a $+\infty$
- se x tende a $-\infty$, a^x tende a 0



$f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty), f(x) = a^x$ con $0 < a < 1$

- $a^0 = 1, a^1 = a$
- $a^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$
- *strettamente decrescente:*
 $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$
- se x tende a $+\infty$, a^x tende a 0
- se x tende a $-\infty$, a^x tende a $+\infty$

PROPRIETÀ DELL'ESPONENZIALE:

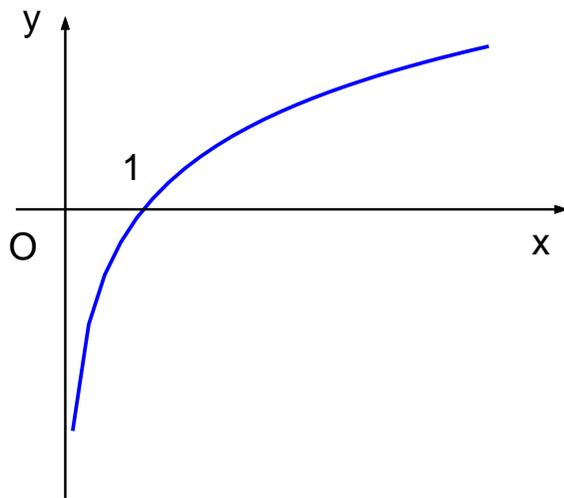
$a^x a^y = a^{x+y}$ (prodotto), $(a^x)^y = a^{xy}$ (composizione), $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ (reciproco).

Funzione Logaritmo

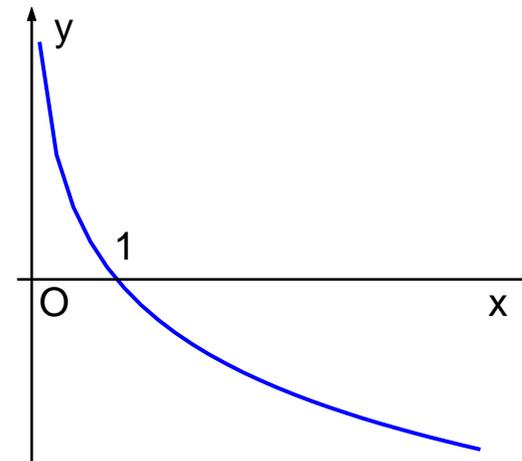
La funzione esponenziale $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = a^x$ è strettamente monotona e surgettiva, quindi invertibile.

$f^{-1} : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log_a x$ logaritmo in base a di x

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$



$$y = \log_a x \text{ con } a > 1$$



$$y = \log_a x \text{ con } 0 < a < 1$$

Proprietà del Logaritmo

Il logaritmo $\log_a x$ è l'esponente a cui bisogna elevare la base a per ottenere x .

- $a^{\log_a x} = x$ per ogni $x > 0$
- $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$
- $\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$ per ogni $x_1, x_2 > 0$
- $\log_a \left(\frac{x_1}{x_2} \right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$ per ogni $x_1, x_2 > 0$
- $\log_a(x^b) = b \log_a x$ per ogni $x > 0$ e $b \in \mathbb{R}$
- **cambio di base:** $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$ per ogni $x > 0$ e $a, b > 0$

Il pH

Acidi e sali in soluzioni acquose formano ioni di idrogeno. La concentrazione di questi ioni permette di quantificare il grado di **acidità** o **alcalinità** della soluzione.

Il punto di riferimento è l'acqua pura a 25 gradi C, in cui si hanno 10^{-7} moli/l di ioni. Si parla di:

- **soluzioni acide**, se la concentrazione di ioni è maggiore di 10^{-7}
- **soluzioni basiche o alcaline**, se la concentrazione di ioni è minore di 10^{-7}
- **soluzioni neutre**, se la concentrazione di ioni è pari a 10^{-7}

Si definisce pH

$$\text{pH} = -\log_{10} \text{H}^+$$

dove H^+ è la concentrazione di ioni idrogeno.

Il pH – Esercizio

sostanza	pH
acqua pura	7
sangue	7.4
pioggia	6.5

Il pH della pioggia e quello del sangue differiscono di poco; tuttavia,

$$H_{\text{pioggia}}^+ = 10^{-6.5}, \quad H_{\text{sangue}}^+ = 10^{-7.4},$$

da cui

$$\frac{H_{\text{pioggia}}^+}{H_{\text{sangue}}^+} = 10^{0.9} \simeq 8,$$

cioè la concentrazione di ioni nella pioggia è circa 8 volte quella del sangue.

Esercizio. Verificare che la concentrazione di ioni idrogeno nel sangue è circa il 40% di quella nell'acqua.

Esercizi

1. Sapendo che $\log_{10} 2 \simeq 0,30103$ e che $\log_{10} e \simeq 0,43429$, calcolare i valori di $\log_{10} 4$, $\log_{10} \frac{1}{5}$, $\log_e 2$.

Soluzione: basta notare che

$$\log_{10} 4 = \log_{10} 2^2 = 2 \log_{10} 2,$$

$$\log_{10} \frac{1}{5} = \log_{10} \frac{2}{10} = \log_{10} 2 - \log_{10} 10 = \log_{10} 2 - 1,$$

$$\log_e 2 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} e}.$$

2. Determinare le costanti α e β in modo che il grafico della funzione $f(x) = \alpha e^{\beta x}$ passi per i punti $(0, 5)$ e $(4, 15)$.

Soluzione: poiché $f(0) = \alpha$, si ha immediatamente che $\alpha = 5$. Si ottiene quindi che $f(4) = 5e^{4\beta} = 15$, da cui $e^{4\beta} = 3$, cioè $\beta = \frac{1}{4} \log_e 3$.

Esercizi

3. Determinare l'insieme dei valori di x per cui risulta $\log(2x+3) < 1$.

Soluzione: l'argomento del logaritmo deve essere positivo, cioè $2x + 3 > 0$. Inoltre, per la stretta monotonia dell'esponenziale la condizione $\log(2x + 3) < 1$ è equivalente a $2x + 3 < 10$.

Pertanto, l'insieme cercato è $(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$.

4. Determinare il campo di esistenza della funzione

$$f(x) = \log(x^2 - 5x + 6).$$

Soluzione: l'argomento del logaritmo deve essere positivo, cioè $x^2 - 5x + 6 > 0$, quindi il campo di esistenza è $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$.

Esercizi

5. Determinare il campo di esistenza della funzione

$$f(x) = \sqrt{\log(x^2 - 5x + 7)}.$$

Soluzione: l'argomento del logaritmo deve essere positivo, cioè $x^2 - 5x + 7 > 0$. L'argomento della radice quadrata deve essere non negativo, cioè $\log(x^2 - 5x + 7) \geq 0$, quindi $x^2 - 5x + 7 \geq 1$.

La seconda condizione contiene anche la prima. Quindi, il campo di esistenza è $(-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$.

6. Determinare il campo di esistenza della funzione $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$.

Soluzione: l'argomento della radice quadrata deve essere non negativo, cioè $e^x - 1 \geq 0$ e quindi $x \geq 0$. Il campo di esistenza è $[0, +\infty)$.

Esercizi

1. Date le funzioni $f(x) = e^x$ e $g(x) = \ln(x - 2)$,

(a) dire quanto vale $f \circ g$ e qual è il suo insieme di definizione;

(b) dire quanto vale $g \circ f$ e qual è il suo insieme di definizione.

Soluzione: $(f \circ g)(x) = e^{\ln(x-2)} = x - 2$ definita per $x > 2$.

$(g \circ f)(x) = \ln(e^x - 2)$ definita per $x > \ln 2$.

2. Date le funzioni $f(x) = -x^3$ e $g(x) = \ln x$,

(a) dire quanto vale $f \circ g$ e qual è il suo insieme di definizione;

(b) dire quanto vale $g \circ f$ e qual è il suo insieme di definizione.

Soluzione: $(f \circ g)(x) = -(\ln x)^3$ definita per $x > 0$.

$(g \circ f)(x) = \ln(-x^3)$ definita per $x < 0$.