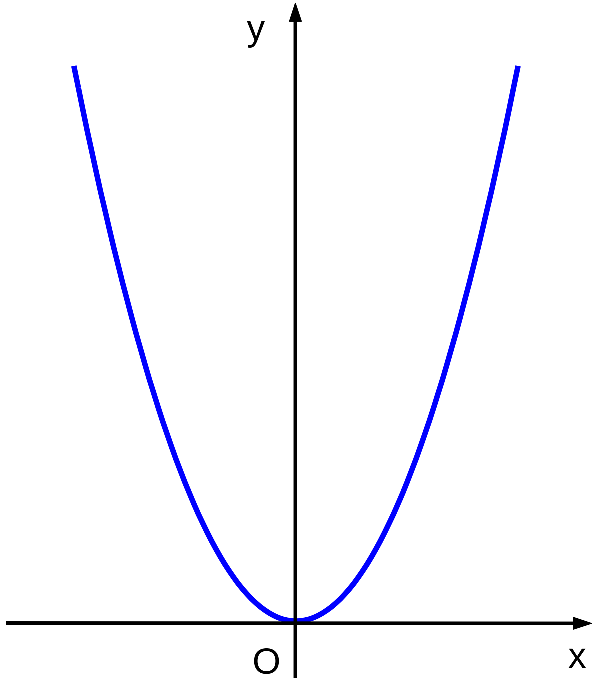
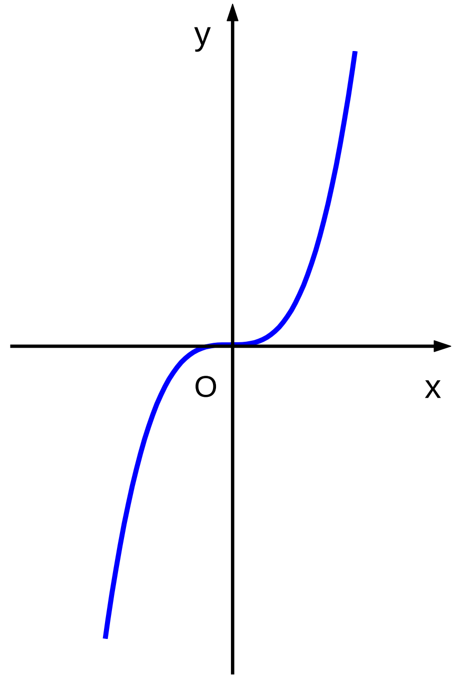
Potenze con Esponente Intero Positivo



$y = f(x) = x^2$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ funzione pari



$y = g(x) = x^3$

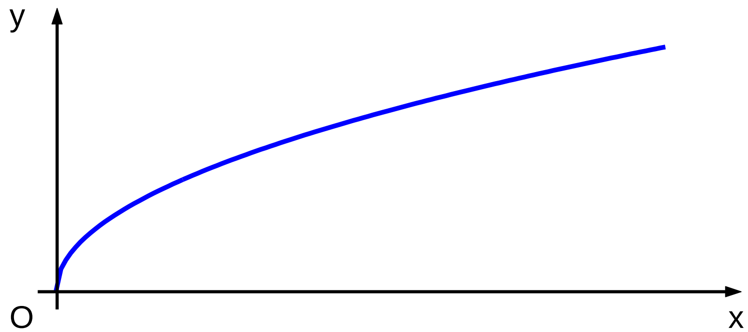
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione dispari

Il grafico di x^n è qualitativamente simile a quello di x^2 se n è pari o a quello di x^3 se n è dispari.

Radici

Consideriamo il problema dell'invertibilità della funzione potenza $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

- Se $n = 1$, la funzione $f(x) = x$ è l'identità, con inversa uguale a se stessa.
- Se $n = 2$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ non è invertibile, ma lo è da $[0, +\infty)$ in $[0, +\infty)$. Chiamiamo radice quadrata la sua inversa:
$$f^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty), \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$

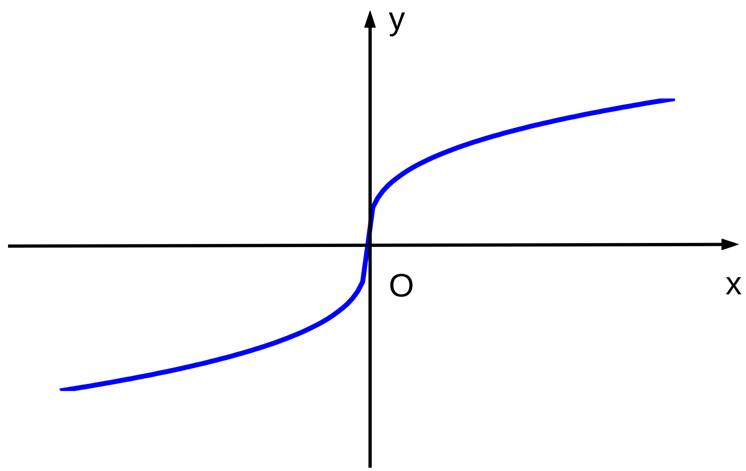


$y = \sqrt{x}$

In generale, se n è pari, la funzione $f(x) = x^n$ è invertibile da $[0, +\infty)$ in $[0, +\infty)$. Chiamiamo l'inversa radice n-sima $\sqrt[n]{x}$ definita da $[0, +\infty)$ in $[0, +\infty)$.

Radici

- Se $n = 3$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ è invertibile.
  Chiamiamo radice cubica la sua inversa:
  $$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}.$$



$y = \sqrt[3]{x}$

In generale, se n è dispari, la funzione $f(x) = x^n$ è invertibile da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.
Chiamiamo radice n-sima $\sqrt[n]{x}$ definita da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

Funzioni Potenza

Potenze ad esponente intero:

- se $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = x^n$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$;
- se l'esponente è un intero negativo,

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad \text{definita per ogni } x \neq 0.$$

Potenze ad esponente razionale: per $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N} - \{0\}$

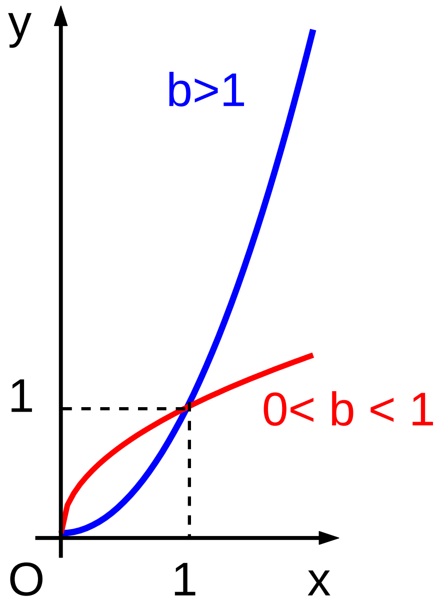
$$f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} \qquad \text{definita per ogni } x > 0.$$

Potenze ad esponente reale: per *estensione* si può definire la *potenza ad esponente reale*: $b \in \mathbb{R}$

$$f(x) = x^b \qquad \text{definita per ogni } x > 0$$

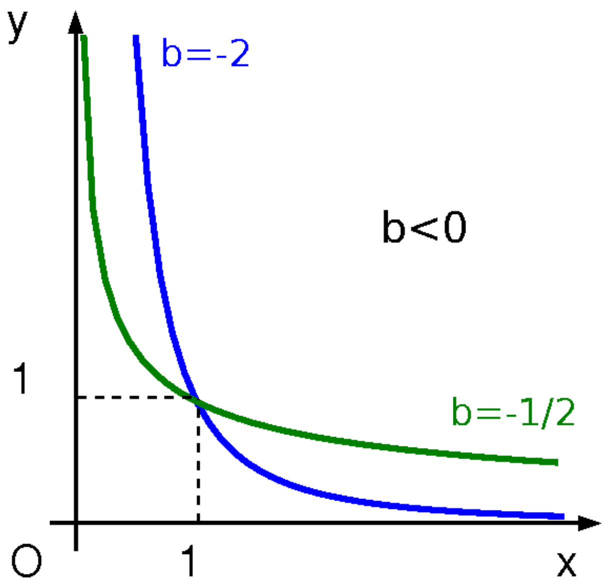
(resta indefinito 0^0 !!!)

Grafico di $f(x) = x^b$ con $b \in \mathbb{R}$



$$y = f(x) = x^b \quad \text{per } b > 0$$

$$f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$$



$$y = f(x) = x^b \quad \text{per } b < 0$$

$$f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$$

Ancora sulle Potenze

Polinomi: con operazioni di somma e prodotto si costruiscono i *polinomi*, cioè le funzioni del tipo:

$$x \mapsto P_n(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_{n-1}\, x^{n-1} + a_n\, x^n.$$

P_n è detto polinomio di grado n.

Funzioni Razionali: facendo il quoziente di due polinomi P e Q si ottengono le *funzioni razionali*, del tipo:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{definita su } \{x \in \mathbb{R} : \ Q(x) \neq 0\}.$$

Come caso particolare ritroviamo le funzioni potenza con esponente intero:

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad \text{definita su } \mathbb{R} - \{0\}.$$

Campo di Esistenza

Il campo di esistenza di una funzione f è il dominio più grande su cui ha significato la legge f.

Esercizio 1. Determinare il campo di esistenza della funzione $f(x) = 9 + 2x$.

Soluzione: $\mathbb{R}$

Esercizio 2. Determinare il campo di esistenza della funzione $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{-x}$.

Soluzione: affinché le due radici abbiano significato, i radicandi devono essere entrambi non negativi: $x - 2 \geq 0$ e $-x \geq 0$, cioè $x \geq 2$ e $x \leq 0$.
Segue che la funzione non è definita per alcun valore di x.

Campo di Esistenza

Esercizio 3. Determinare il campo di esistenza della funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x^2-4}$.

Soluzione: il denominatore deve essere diverso da zero, cioè $x \neq 2$ e $x \neq -2$. L'argomento della radice quadrata deve essere non negativo, cioè $9 - x^2 \geq 0$ e quindi $-3 \leq x \leq 3$. Dunque il campo di esistenza è $[-3,-2) \cup (-2,2) \cup (2,3]$.

Esercizio 4. Determinare il campo di esistenza della funzione $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^2-1}{x+3}}$.

Soluzione: l'unica condizione da imporre è che il denominatore sia diverso da 0. Quindi il campo di esistenza è $\mathbb{R} - \{-3\}$.