Criterio di Invertibilità

Le funzioni strettamente monotone sono iniettive.

Criterio di Invertibilità:

se f è strettamente monotona e surgettiva, allora f è invertibile.

Se $f : D \to C$ è invertibile, allora

f crescente $\Leftrightarrow$ f^{-1} crescente

f decrescente $\Leftrightarrow$ f^{-1} decrescente

Esercizi sulle Funzioni Inverse

Esercizio 1. Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita: $f(x) = -x+3$, dire se è invertibile e trovare la formula dell'inversa.

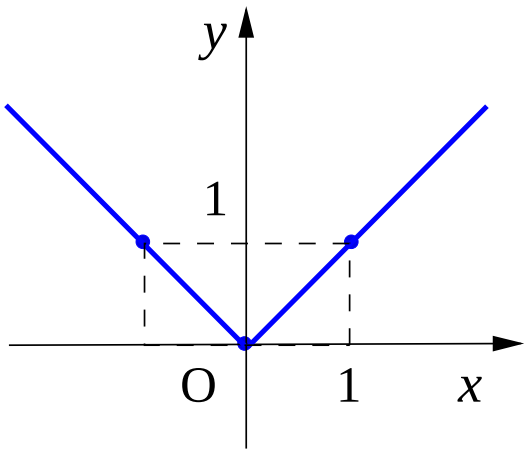
Soluzione: la funzione è biunivoca e l'inversa è $f^{-1}(y) = -y + 3$.

Esercizio 2. Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita: $f(x) = x^2 + 2x + 1$, dire se è invertibile e trovare la formula dell'inversa.

Soluzione: la funzione non è invertibile in quanto non è né iniettiva, né surgettiva. Per renderla surgettiva basta pensarla a valori in $\mathbb{R}_+$ e per renderla iniettiva basta, per esempio, restringerla a $[-1, +\infty)$. Dunque, la funzione $f : [-1, +\infty) \to \mathbb{R}_+$ definita da $f(x) = x^2+2x+1$ è invertibile e la sua inversa è

$$f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to [-1, +\infty), \quad f^{-1}(y) = \sqrt{y} - 1.$$

Funzione Valore Assoluto



$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{per } x \geq 0 \\ -x & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

PROPRIETÀ:

- $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$
- $|x_1 \cdot x_2| = |x_1| \cdot |x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
- $\left|\frac{x_1}{x_2}\right| = \frac{|x_1|}{|x_2|} \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_2 \neq 0$
- $\sqrt{x^2} = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- *disuguaglianza triangolare:*
  $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
- se $\delta > 0$, $|x| \leq \delta \Leftrightarrow -\delta \leq x \leq \delta$
  $|x - x_0| \leq \delta \Leftrightarrow x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$

Esercizi

1. Risolvere le seguenti disequazioni:

- $|2x + 3| \leq 1$
- $|2x + 3| \leq -2$
- $|4x + 1| > 2$

Esercizi

2. Disegnare il grafico qualitativo della seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & \text{per } x \leq -1 \\ |x| & \text{per } x > -1 \end{cases}$$

e determinarne gli eventuali punti di massimo e minimo assoluti e relativi nell'intervallo $(-\infty, 3]$.

Esercizi

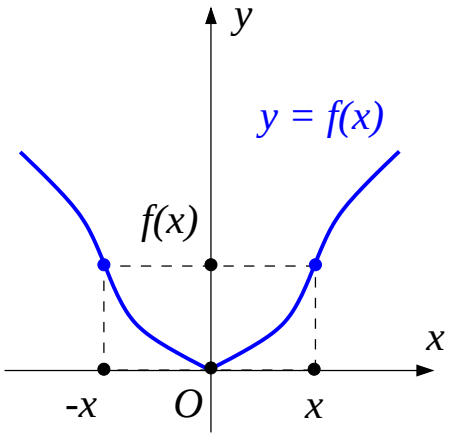
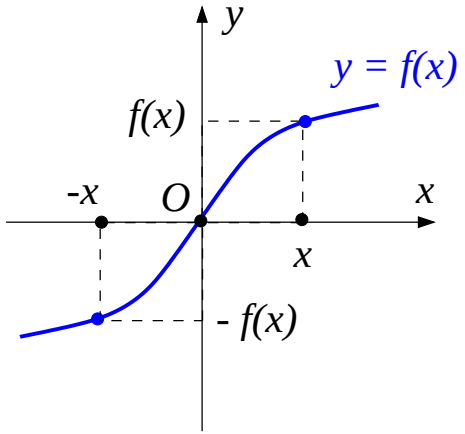
3. (compito d'esame del 26/09/2013)
Disegnare il grafico qualitativo della seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{per } -2 \leq x < -1, \\ 2|x| & \text{per } -1 \leq x < 2, \\ 4x - x^2 & \text{per } 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

e determinarne gli eventuali punti di massimo e minimo assoluti e relativi nell'intervallo $[-2, 4]$.

Funzioni Pari e Dispari

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice

- PARI: se $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
  In questo caso il grafico della funzione è simmetrico rispetto all'asse y
- DISPARI: se $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
  In questo caso il grafico della funzione è simmetrico rispetto all'origine O
- ESEMPI: $f(x) = x^2$, $f(x) = x^{2n}$, $f(x) = |x|$ funzioni pari

  $f(x) = x$, $f(x) = x^{2n+1}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ funzioni dispari