Funzione Composta

Date due funzioni $g : A \to B$ e $f : B \to C$ si può definire la funzione composta:

$$f \circ g : A \to C \qquad x \mapsto g(x) \mapsto f(g(x))$$

notazione funzionale $\qquad (f \circ g)(x) = f(g(x))$

La composizione ha senso se il valore $g(x)$ appartiene al dominio della funzione f.

Il campo di esistenza della funzione composta è costituito dai soli valori di x per i quali la composizione funzionale ha senso.

Esempi:

- $f(x) = \sqrt{x},\ g(x) = x^2 - 4 \Rightarrow (f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ con $D = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
- $f(x) = \dfrac{1}{x},\ g(x) = x - 7 \Rightarrow (f \circ g)(x) = \dfrac{1}{x - 7}$ con $D = \{x \in \mathbb{R} :\ x \neq 7\}$
- $f(x) = \dfrac{1}{x},\ g(x) = x^2 + 1 \Rightarrow (f \circ g)(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ con $D = \mathbb{R}$

Funzione Composta

Esercizio 1. Date le funzioni $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = 2x + 1$,

- dire quanto vale $f \circ g$ e qual è il suo insieme di definizione;
- dire quanto vale $g \circ f$ e qual è il suo insieme di definizione.

Soluzione: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{2x+1}$ definita per $x \geq -\frac{1}{2}$.

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2\sqrt{x} + 1$ definita per $x \geq 0$.

Esercizio 2. Date le funzioni $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 1$,

- dire quanto vale $f \circ g$ e qual è il suo insieme di definizione;
- dire quanto vale $g \circ f$ e qual è il suo insieme di definizione.

Soluzione: $(f \circ g)(x) = (x+1)^2$, $(g \circ f)(x) = x^2 + 1$.

Entrambe le funzioni sono definite su tutto $\mathbb{R}$.

Funzione Inversa

Una funzione biunivoca è invertibile, cioè:

se $f : D \to C$ è biunivoca, possiamo definire la funzione inversa f^{-1}

$$f^{-1} : C \to D, \quad x = f^{-1}(y)$$

per ogni $y \in C$, x è l'unico punto di D tale che $f(x) = y$

Un tale x esiste ed è unico perché la funzione f è biunivoca.

Esempi

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x + 1$
  $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y - 1)$

- $f : (-\infty, 0] \to [0, +\infty), \quad f(x) = x^2$
  $f^{-1} : [0, +\infty) \to (-\infty, 0], \quad f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$

Proprietà della Funzione Inversa

Sia $f : D \to C$ invertibile e sia $f^{-1} : C \to D$ la sua funzione inversa.

Consideriamo la funzione composta $f^{-1} \circ f$:

$$f^{-1} \circ f : \; x \in D \; \mapsto \; f(x) \in C \; \mapsto \; f^{-1}\big(f(x)\big) = x \in D$$

In altre parole, $f^{-1} \circ f : D \to D$, $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ è la *funzione identità* su D.

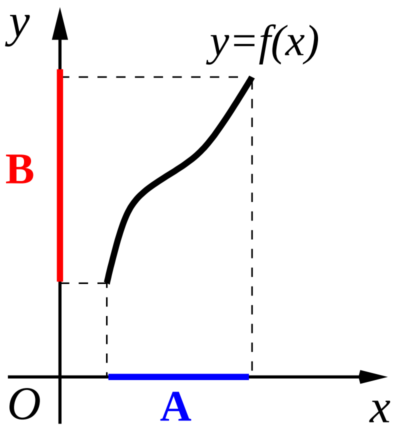
Analoga proprietà vale per $f \circ f^{-1}$:

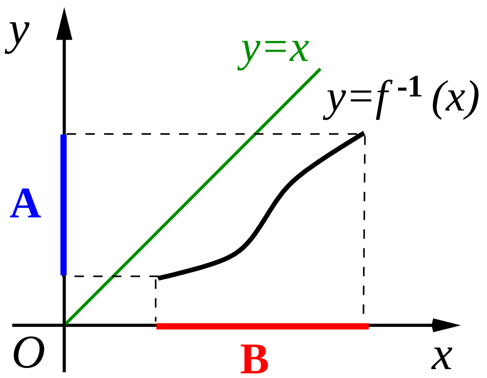
$$f \circ f^{-1} : \; y \in C \; \mapsto \; f^{-1}(y) \in D \; \mapsto \; f\big(f^{-1}(y)\big) = y \in C$$

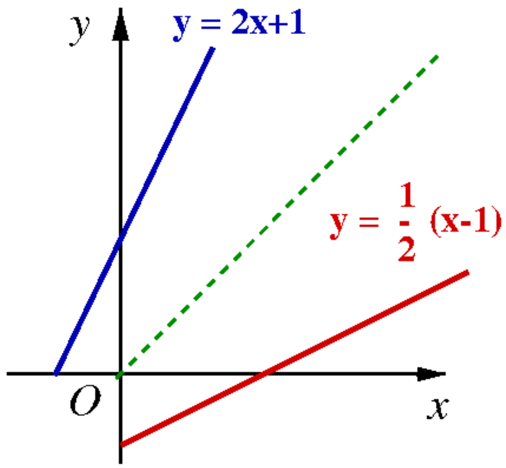
In altre parole, $f \circ f^{-1} : C \to C$, $(f \circ f^{-1})(y) = y$ è la *funzione identità* su C.

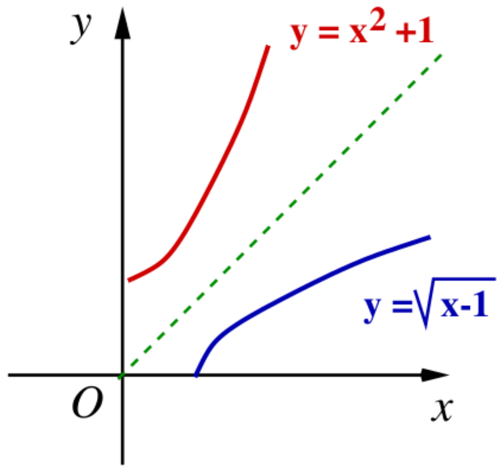
Grafico della Funzione Inversa

Il grafico di f^{-1} si ottiene per simmetria rispetto alla retta $y = x$.









Ancora sulla Funzione Inversa

Attenzione: non confondere la funzione inversa f^{-1} con la funzione reciproco $\dfrac{1}{f}$!!!

Esempio 1. Consideriamo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x$.

La funzione inversa è $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \dfrac{y}{3}$.

La funzione reciproco è $g : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{3x}$.

Esempio 2. Consideriamo $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$.

La funzione inversa è $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

La funzione reciproco è $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}_+$, $g(x) = \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{x^2}$.