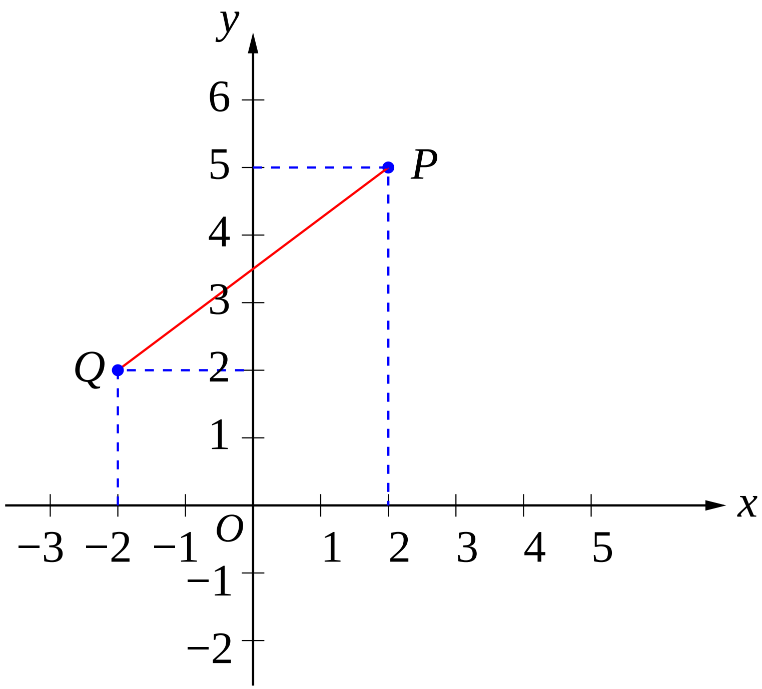
Coordinate Cartesiane nel Piano

$O = (0, 0)$ origine degli assi

x ascissa, y ordinata

sistemi monometrici: stessa unità di misura sui due assi x, y

sistemi dimetrici: unità di misura diverse sui due assi *(spesso utile nelle applicazioni)*



La distanza tra due punti $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ è data da

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Se il sistema è monometrico, $d(P, Q)$ è la lunghezza del segmento PQ.

Rette

Nel piano cartesiano ogni equazione di primo grado

$$a\,x + b\,y + c = 0$$

con a e b non contemporaneamente nulli, rappresenta una retta e viceversa ogni retta può essere descritta con un'equazione di questo tipo.

Due equazioni con coefficienti a, b, c proporzionali rappresentano la medesima retta, ad esempio:

$$2\,x + y + 5 = 0 \quad \text{e} \quad 4\,x + 2\,y + 10 = 0$$

Casi particolari:

Se $a = 0$: $\quad b\,y + c = 0$ descrive una retta *orizzontale*.

Se $b = 0$: $\quad a\,x + c = 0$ descrive una retta *verticale*.

Rette

Se $b \neq 0$ l'equazione della retta può essere riscritta, risolvendo rispetto ad y:

$$y = mx + q \quad \text{dove} \quad m = -\frac{a}{b}, \; q = -\frac{c}{b}$$

m si chiama coefficiente angolare e rappresenta la *pendenza*.

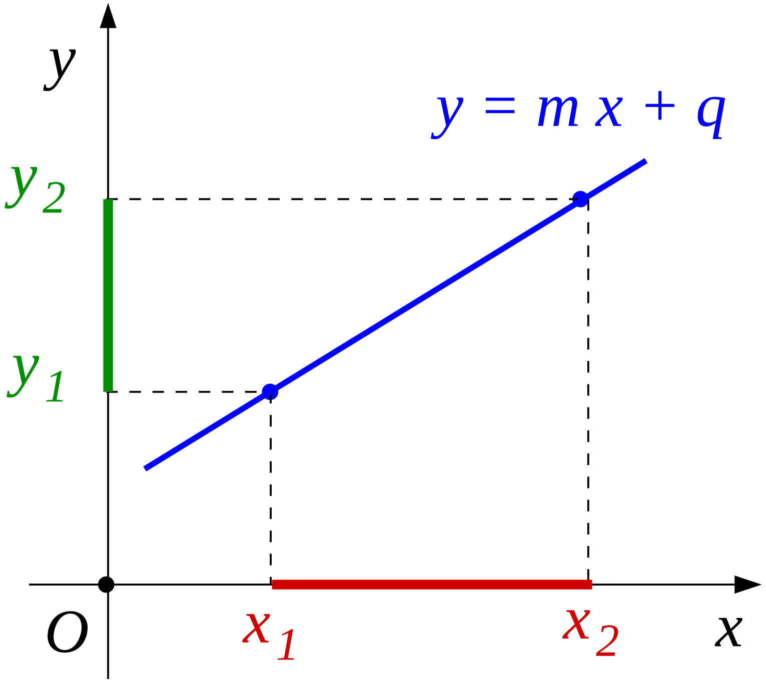
q si chiama intercetta e rappresenta l'ordinata del punto di intersezione con l'asse y.

Osservazioni:

- una retta (con $b \neq 0$) passa per l'origine se e solo se $q = 0$
- due rette di equazioni $y = mx + q$ e $y = m^*x + q^*$ sono *parallele* se e solo se $m^* = m$
- due rette di equazioni $y = mx + q$ e $y = m^*x + q^*$ sono *perpendicolari* se e solo se $m \cdot m^* = -1$

Rette

Il coefficiente angolare di una retta soddisfa la seguente relazione:



$$y_1 = mx_1 + q$$

$$y_2 = mx_2 + q$$

Sottraendo membro a membro:

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow \qquad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \forall x_1, x_2$$

Rette

Equazione di una retta passante per due punti: l'equazione della retta passante per due punti assegnati $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ può essere scritta

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad \text{oppure} \qquad y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

Attenzione: la prima formula vale solo se $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$; la seconda formula vale solo se $x_1 \neq x_2$

Esercizi Rette

ESERCIZIO 1

Scrivere l'equazione della retta passante per $P = (5, -1)$ e $Q = (5, 2)$.

Soluzione: P e Q hanno la stessa ascissa 5. Retta verticale $x = 5$.

ESERCIZIO 2

Scrivere l'equazione della retta passante per $P = (3, 1)$ e $Q = (\sqrt{2}, 1)$.

Soluzione: P e Q hanno la stessa ordinata 1. Retta orizzontale $y = 1$.

ESERCIZIO 3

Scrivere l'equazione della retta passante per $P = (0, 1)$ e $Q = (-1, 2)$.

Soluzione: $$\frac{y-1}{2-1} = \frac{x-0}{-1-0} \quad \Rightarrow \quad y = -x + 1$$

Esercizi Rette

ESERCIZIO 4

Scrivere l'equazione della retta passante per $P = (-1, 2)$ con coefficiente angolare $m = 2$.

Soluzione: $y = 2\,x + 4$

ESERCIZIO 5

Scrivere l'equazione della retta che interseca l'asse delle ascisse in $x = 5$ e l'asse delle ordinate in $y = -1$.

Soluzione: $y = \dfrac{1}{5}\,x - 1$

ESERCIZIO 6

Scrivere l'equazione della retta che interseca l'asse delle ordinate in $y = 5$, parallela alla retta $y = 3x - 7$.

Soluzione: $y = 3x + 5$.

Insiemi di Numeri

- $\mathbb{N} = \{0\,,\,1\,,\,2\,,\,3\,,\,\ldots\}$ insieme dei numeri naturali
- $\mathbb{Z} = \{\ldots\,,\,-3\,,\,-2\,,\,-1\,,\,0\,,\,1\,,\,2\,,\,\ldots\}$ insieme dei numeri interi
- $\mathbb{Q} = \left\{\frac{n}{m} :\ n, m \in \mathbb{Z},\ m \neq 0\right\}$ insieme dei numeri razionali
- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{numeri irrazionali}\}$ insieme dei numeri reali

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Esempi di numeri irrazionali:
$\sqrt{2}$, π, il numero di Nepero e, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ...

Sottoinsiemi di Numeri Reali

Intervalli limitati $\quad a, b \in \mathbb{R}$

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \leq b\}$ intervallo chiuso

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\}$ intervallo aperto

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x < b\}$ intervallo chiuso a sn e aperto a ds

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x \leq b\}$ intervallo chiuso a ds e aperto a sn

Intervalli illimitati $\quad a, b \in \mathbb{R}$

$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq a\} \qquad (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq b\}$

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \ x > a\} \qquad (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ x < b\}$

$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq 0\} \qquad \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

$\mathbb{R}_- = (-\infty, 0] = \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq 0\}$