Concentrazioni – Esercizi

Problema 3. Avendo 10 Kg di una soluzione al 30%, quanto solvente si deve aggiungere per ottenere una nuova soluzione al 20%?
Avendo 20 Kg di una soluzione al 10%, quanto soluto si deve aggiungere per ottenere una nuova soluzione al 20%?

Soluzione alla prima domanda: la prima soluzione contiene $\frac{30}{100} \cdot 10 = 3\,\text{Kg}$ di soluto. Per diminuirne la concentrazione si deve aggiungere una quantità x di solvente in modo tale che

$$\frac{3}{10+x} = \frac{20}{100} \Leftrightarrow 300 = 200 + 20\,x \quad \Leftrightarrow \quad x = 5\,\text{Kg}$$

Soluzione alla seconda domanda: la seconda soluzione contiene $\frac{10}{100} \cdot 20 = 2\,\text{Kg}$ di soluto. Per aumentarne la concentrazione si deve aggiungere una quantità y di soluto in modo tale che

$$\frac{2+y}{20+y} = \frac{20}{100} \Leftrightarrow 200 + 100\,y = 400 + 20\,y \quad \Leftrightarrow \quad y = 2.5\,\text{Kg}$$

Concentrazioni – Esercizi

Problema 4. Dati 5 Kg di una soluzione al 10% e 10 Kg della medesima soluzione *(stesso solvente e stesso soluto)* al 15%, quale è la concentrazione della soluzione ottenuta mescolandole?

Soluzione:

$$\frac{10}{100} \cdot 5 = 0.5\,\text{Kg} \qquad \text{quantità di soluto nella prima soluzione}$$

$$\frac{15}{100} \cdot 10 = 1.5\,\text{Kg} \qquad \text{quantità di soluto nella seconda soluzione}$$

$$\left(\frac{10}{100} \cdot 5 + \frac{15}{100} \cdot 10\right) = 2\,\text{Kg} \qquad \text{quantità di soluto nella soluzione finale}$$

$$5 + 10 = 15\,\text{Kg} \qquad \text{peso della soluzione finale}$$

La concentrazione finale è $\frac{2}{15} \approx 0.133$; dunque la soluzione finale è al 13.3% circa.

Concentrazioni – Esercizi

Problema 4 (variante). Date due soluzioni S_1 e S_2 dello stesso solvente e stesso soluto, la prima al 10% e la seconda al 4%, calcolare la concentrazione della soluzione ottenuta mescolando 6 parti di S_1 e 3 parti di S_2.

Soluzione: (P = parti)

$$\frac{10}{100} \cdot 6 = 0.6\,\mathrm{P} \qquad \text{quantità di soluto nella prima soluzione}$$

$$\frac{4}{100} \cdot 3 = 0.12\,\mathrm{P} \qquad \text{quantità di soluto nella seconda soluzione}$$

$$\left(\frac{10}{100} \cdot 6 + \frac{4}{100} \cdot 3\right) = 0.72\,\mathrm{P} \qquad \text{quantità di soluto nella soluzione finale}$$

$$(6+3) = 9\,\mathrm{P} \qquad \text{peso della soluzione finale}$$

La concentrazione finale è

$$\frac{\frac{10}{100} \cdot 6 + \frac{4}{100} \cdot 3}{9} = \frac{10}{100} \cdot \frac{6}{9} + \frac{4}{100} \cdot \frac{3}{9} = 0.08\,.$$

Dunque la soluzione finale è all'8%.

Concentrazioni – Esercizi

Problema 5. Sono date due soluzioni dello stesso soluto e dello stesso solvente, la prima al 10% e la seconda al 20%. In quali percentuali si deve mescolarle per ottenere una soluzione al 12%?

Soluzione: indichiamo con x la percentuale della prima soluzione. La percentuale della seconda soluzione sarà $100 - x$.

Deve valere:

$$\frac{x}{100} \cdot \frac{10}{100} + \frac{100-x}{100} \cdot \frac{20}{100} = \frac{12}{100} \quad \Leftrightarrow \quad 10\,\frac{x}{100} + 20\left(1 - \frac{x}{100}\right) = 12$$

$$\Leftrightarrow \quad -10\,\frac{x}{100} = -8 \quad \Leftrightarrow \quad x = 80$$

Le percentuali sono: 80% della prima soluzione e 20% della seconda soluzione.

Concentrazioni – Esercizi

Problema 6. Sono date due soluzioni dello stesso soluto e dello stesso solvente, la prima al 10% e la seconda al 4%. In quale proporzione occorre mescolarle per ottenere una soluzione all'8%?
Scrivere i risultati sotto forma di frazione con numeratore e denominatore interi.

Soluzione: indichiamo con P_1 e P_2 le quantità (ad esempio espresse in g) della soluzione 1 e della soluzione 2 da mescolare per ottenere la soluzione richiesta.
Siamo interessati a conoscere $\frac{P_1}{P_2}$.

La quantità di soluto contenuta nella prima soluzione è $\frac{10}{100}P_1$ mentre la quantità di soluto contenuta nella seconda soluzione è $\frac{4}{100}P_2$. Calcoliamo la concentrazione della soluzione che si ottiene mescolandole:

$$\frac{\frac{10}{100}P_1 + \frac{4}{100}P_2}{P_1 + P_2} = \frac{8}{100}$$

Da questa equazione otteniamo: $10\frac{P_1}{P_2} + 4 = 8\left(\frac{P_1}{P_2} + 1\right) \quad \Leftrightarrow \quad 2\frac{P_1}{P_2} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{P_1}{P_2} = 2$

Problema 7. Si dispone di una soluzione S_1 con concentrazione incognita e di una soluzione S_2, dello stesso soluto e dello stesso solvente, concentrata al 20%. Determinare la concentrazione incognita, sapendo che miscelando 2 parti di S_1 con 3 parti di S_2 si ottiene una soluzione concentrata al 30%.

Soluzione: indichiamo con x la concentrazione incognita.

Si ha che

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{x}{100} + \frac{3}{5} \cdot \frac{20}{100} = \frac{30}{100}$$

da cui $x = 45$.

Cifre Significative

La misura sperimentale di una grandezza è inevitabilmente approssimata a causa degli errori di osservazione, dei limiti della strumentazione, ecc. Si utilizzano quindi notazioni del tipo

$$a = (12.35 \pm 0.01)\,\mathrm{m}$$

per indicare che la misura di a è affetta da una incertezza di 1 cm.

Cifre significative: si esprime una misura sperimentale (o in generale affetta da errori) riportando solo le cifre sicure e la prima cifra incerta. Ad esempio, scriviamo:

$$a \approx 12.35\,\mathrm{m} \qquad \textit{rappresentazione con 4 cifre significative}$$

Troncamento e Arrotondamento

Troncamento: si trascurano le cifre decimali che non interessano. Ad esempio,

$$\pi = 3.141592653\ldots \quad \longrightarrow \quad \pi \approx 3.14 \qquad \text{(con 2 cifre decimali)}$$
$$\longrightarrow \quad \pi \approx 3.1415 \quad \text{(con 4 cifre decimali)}$$

$$e = 2.71828\ldots \quad \longrightarrow \quad e \approx 2.71 \quad \text{(con 2 cifre decimali)}$$

Arrotondamento: si prende la migliore approssimazione con numero di cifre decimali fissato. Ad esempio,

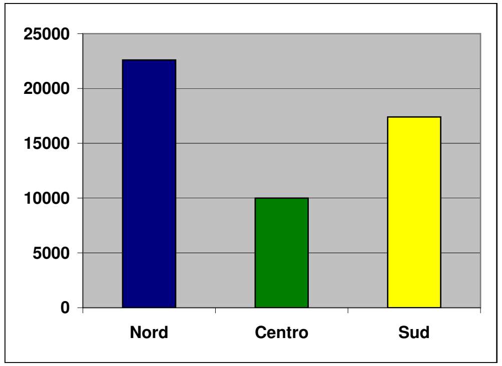
$$\pi = 3.141592653\ldots \quad \longrightarrow \quad \pi \approx 3.14 \qquad \text{(con 2 cifre decimali)}$$
$$\longrightarrow \quad \pi \approx 3.1416 \quad \text{(con 4 cifre decimali)}$$

$$e = 2.71828\ldots \quad \longrightarrow \quad e \approx 2.72 \quad \text{(con 2 cifre decimali)}$$

Percentuali – Esercizi

Esercizio 1. La popolazione di una nazione risulta geograficamente distribuita come in tabella:

area	abitanti	%
Nord	22600	45
Centro	10000	20
Sud	17400	35
totale	50000	



(istogramma - aree dei rettangoli proporzionali al numero di abitanti)

- Esprimere gli abitanti delle varie aree geografiche, in forma percentuale, arrotondata a un numero intero.

$$\textit{percentuale nord} = 100 \cdot (22600/50000) = 45.2 \approx 45\%$$

- Una malattia ha una prevalenza (la prevalenza di una malattia è la percentuale degli individui che sono affetti da tale malattia) dell'1% al nord, del 2% al sud ed è inesistente al centro. Calcolare la prevalenza sul totale della popolazione, arrotondata alla seconda cifra decimale:

$$\textit{prevalenza} = 100 \cdot \frac{22600 \cdot 0.01 + 17400 \cdot 0.02}{50000} = 1.148 \approx 1.15\%$$

Percentuali – Esercizi

Esercizio 2. Una ditta è composta da 50 filiali. Nell'ultimo anno, il 40% delle filiali ha maturato un saldo attivo di 100 Euro, il 30% ha maturato un saldo attivo di 50 Euro e le restanti hanno riportato un passivo di 60 Euro. Qual è il saldo complessivo della ditta?

$$\textit{saldo complessivo} = 0.4 \cdot 50 \cdot 100 + 0.3 \cdot 50 \cdot 50 - 0.3 \cdot 50 \cdot 60 = 1850\,\text{Euro}$$

Esercizio 3. Un'epidemia di influenza colpisce il 40% dei bambini che non hanno ancora compiuto dieci anni e il 10% delle persone di età maggiore o uguale di dieci anni. Sapendo che si è ammalato di influenza il 20% della popolazione, calcolare la percentuale dei bambini al di sotto dei dieci anni rispetto all'intera popolazione ed esprimere il risultato sotto forma di frazione e di percentuale con una cifra decimale arrotondata.

Indichiamo con x la percentuale dei bambini sull'intera popolazione. Sappiamo che è malato:

$$\frac{40}{100} \cdot \frac{x}{100} + \frac{10}{100} \cdot \frac{100 - x}{100} = \frac{20}{100} \qquad \textit{da cui} \qquad x = \frac{1000}{30},$$

cioè la percentuale dei bambini sull'intera popolazione è il 33.3%.

Percentuali – Esercizi

Esercizio 4. Un conto corrente bancario dà il 3% lordo di interesse annuo. Tali interessi sono tassati al 27%. Calcolare il rendimento netto del conto.

Se C è il capitale depositato sul conto

$\frac{3}{100} \cdot C$ *interessi lordi* $\qquad \frac{27}{100} \cdot \frac{3}{100} \cdot C$ *tasse*

$$\frac{3}{100} \cdot C - \frac{27}{100} \cdot \frac{3}{100} \cdot C = \left(1 - \frac{27}{100}\right) \cdot \frac{3}{100} \cdot C = \frac{73}{100} \cdot \frac{3}{100} \cdot C = \frac{2.19}{100} \cdot C$$

rendimento netto del 2.19%

Esercizio 5. Il 20% degli studenti che si presentano all'esame di matematica conosce l'enunciato del "Teorema del limite centrale", tra quelli che conoscono l'enunciato il 30% ne conosce anche la dimostrazione. Sapendo che 3 studenti conoscono sia l'enunciato che la dimostrazione del teorema, scrivere il numero N degli studenti che si presentano all'esame di matematica.

Deve valere la seguente relazione:

$$\frac{30}{100} \cdot \frac{20}{100} \cdot N = 3 \Leftrightarrow N = 50$$

Percentuali – Esercizi

Esercizio 6. Una nazione è divisa in due aree geografiche: "Est" con 10 milioni di abitanti e "Ovest" con 20 milioni di abitanti. Un anno fa il reddito medio pro-capite era lo stesso nelle due aree geografiche. Nel corso dell'ultimo anno il reddito medio pro-capite degli abitanti dell'Est è cresciuto del 10%, mentre il reddito medio pro-capite della popolazione totale è cresciuto soltanto del 2%. Dire se i due dati sono compatibili e calcolare la variazione del reddito medio pro-capite degli abitanti dell'Ovest.

Indicando con x la variazione percentuale di reddito a Ovest, si ha

$$\frac{2}{100} = \frac{10}{100} \cdot \frac{1}{3} + \frac{x}{100} \cdot \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = -2 \Leftrightarrow \textit{variazione in negativo del } 2\%$$