Esercizi di Calcolo delle Variazioni

1. Si è dimostrato a lezione che posto
$$K = \{u \in L^\infty(\Omega) : \ \|u\|_{L^\infty} \le 1\}$$
e data una funzione $v \in L^\infty(\Omega) \setminus K$, il problema
$$\min \Big\{ \|u - v\|_{L^\infty} : \ u \in K \Big\}$$
ha soluzione. Mostrare con un esempio esplicito che in genere non c'è unicità del punto di minimo.

2. Sia $1 < p < \infty$. Sono date due funzioni $v, w \in L^p(\Omega)$, dove $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Si consideri il problema
$$\min \Big\{ \|u - v\|_{L^p} : \ u \in K \Big\}, \tag{1}$$
dove $K := \{u \in L^p(\Omega) : \ u(x) \ge w(x) \text{ per q.o. } x \in \Omega\}$.
   - Dimostrare che K è un insieme convesso.
   - Usando il metodo diretto, dimostrare che il problema (1) ammette soluzione e che esiste un unico punto di minimo $\bar u$.
   - Calcolare esplicitamente $\bar u$. (Suggerimento: dove $v \ge w$, la scelta migliore è prendere v; dove $v < w$, la scelta migliore è ...).

3. Si considerino i seguenti problemi di minimo:
$$\min \Big\{ \int_{-1}^{1} (1 + x^2)|u'(x)|^2 \, dx : \ u \in W^{1,2}(-1, 1), \ u(-1) = 0, \ u(1) = 1 \Big\},$$
$$\min \Big\{ \int_{1}^{2} \Big(\frac{1}{2} x^2 |u'(x)|^2 + x^2 u'(x)\Big) \, dx : \ u \in W^{1,2}(1, 2), \ u(1) = 0, \ u(2) = 1 \Big\},$$
$$\min \Big\{ \int_{1}^{2} \Big(\frac{1}{2} x^2 |u'(x)|^2 + x^2 u'(x)\Big) \, dx : \ u \in W^{1,2}(1, 2), \ u(1) = 0 \Big\}.$$
Per ciascuno di essi, rispondere alle seguenti domande:
   - Dimostrare che il problema di minimo ammette soluzione e che esiste un unico punto di minimo $\bar u$.
   - Scrivere l'equazione di Eulero-Lagrange soddisfatta da $\bar u$.
   - Usando l'equazione di Eulero-Lagrange, determinare $\bar u$.

4. Sia $\lambda > 0$ e sia $1 \le p < \infty$. Si consideri il seguente problema di minimo:
$$\min \Big\{ \int_0^1 |u'(x)|^2 \, dx - \lambda \int_0^1 |u(x)|^p \, dx : \ u \in W_0^{1,2}(0, 1) \Big\}. \tag{2}$$
   - Usando il metodo diretto, dimostrare che se $1 \le p < 2$, il problema (2) ammette soluzione.
   - Si osservi che i due termini nel funzionale hanno gradi di omogeneità diversi (il primo termine è quadratico, il secondo ha omogeneità p). Usando questa osservazione, dimostrare che se $p > 2$, il minimo (2) non è assunto e l'estremo inferiore vale $-\infty$.

- Si è dimostrato che la costante di Poincaré in $W_0^{1,2}(0,1)$ vale π^2. Usando questa informazione, dimostrare che se $p = 2$ e $\lambda < \pi^2$, il problema (2) ammette soluzione. In questo caso calcolare il valore del minimo.
- Infine, dimostrare che, se $p = 2$ e $\lambda = \pi^2$, il minimo vale 0, mentre se $p = 2$ e $\lambda > \pi^2$, il minimo non esiste.

5. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con $\partial\Omega$ lipschitziano. Vale la seguente variante della disuguaglianza di Poincaré: esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\int_\Omega |u(x)|^2\,dx \le C\Big(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx + \int_{\partial\Omega} |u(x)|^2\,d\sigma(x)\Big)$$

per ogni $u \in W^{1,2}(\Omega)$. Qui σ rappresenta la misura superficiale su $\partial\Omega$, mentre u su $\partial\Omega$ è intesa nel senso della traccia di u. Usando questa disuguaglianza e il metodo diretto, dimostrare che, se $f \in L^2(\Omega)$, il funzionale

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx - \int_\Omega f(x)u(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} |u(x)|^2\,d\sigma(x)$$

ammette minimo sullo spazio $W^{1,2}(\Omega)$.

Scrivere poi l'equazione di Eulero-Lagrange in forma integrale e in forma puntuale (supponendo di avere sufficiente regolarità), con relative condizioni al bordo.

6. Sia (a,b) un intervallo limitato. Dimostrare che esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\int_a^b |u(x)|^2\,dx \le C\int_a^b |u'(x)|^2\,dx \tag{3}$$

per ogni $u \in W^{1,2}(a,b)$ tale che $\int_a^b u(x)\,dx = 0$.

7. Sia (a,b) un intervallo limitato e sia $f \in L^2(a,b)$. Si consideri il problema di minimo

$$\min\Big\{\frac{1}{2}\int_a^b |u'(x)|^2\,dx - \int_a^b f(x)u(x)\,dx :\ u \in W^{1,2}(a,b)\Big\}.$$

- Dimostrare che se $\int_a^b f(x)\,dx \neq 0$, il minimo non esiste e l'estremo inferiore vale $-\infty$.
- Dimostrare che se $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, allora

$$\begin{aligned}\inf\Big\{\frac{1}{2}\int_a^b |u'(x)|^2\,dx - \int_a^b f(x)u(x)\,dx :\ u \in W^{1,2}(a,b)\Big\}\\ = \inf\Big\{\frac{1}{2}\int_a^b |u'(x)|^2\,dx - \int_a^b f(x)u(x)\,dx :\ u \in K\Big\},\end{aligned}$$

dove

$$K := \Big\{u \in W^{1,2}(a,b) :\ \int_a^b u(x)\,dx = 0\Big\}.$$

- Usando il metodo diretto e la disuguaglianza (3), dimostrare che il problema

$$\min\Big\{\frac{1}{2}\int_a^b |u'(x)|^2\,dx - \int_a^b f(x)u(x)\,dx :\ u \in K\Big\}$$

ha soluzione e il punto di minimo è unico.

- Scrivere l'equazione di Eulero-Lagrange. Nel caso in cui $(a,b) = (-1,1)$ e $f(x) = x$, determinare esplicitamente il punto di minimo.

8. Sia $u \in L^1(a,b)$ tale che
$$\int_a^b u(x)\,\varphi''(x)\,dx = 0 \quad \text{per ogni } \varphi \in C_c^2(a,b).$$
Dimostrare che u coincide q.o. con una funzione affine, cioè esistono $c, d \in \mathbb{R}$ tali che $u(x) = cx + d$ per q.o. $x \in (a,b)$.

9. Dimostrare che la Γ-convergenza è stabile per sottosuccessioni, cioè, se $F = \Gamma\text{-}\lim_{n\to\infty} F_n$, allora $F = \Gamma\text{-}\lim_{k\to\infty} F_{n_k}$ per ogni sottosuccessione $n_k \to \infty$.

10. Supponiamo che $F = \Gamma\text{-}\lim_{n\to\infty} F_n$ e che F_n sia convesso per ogni n. Dimostrare che F è convesso.

11. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ con bordo lipschitziano e sia $F : L^2(\Omega) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definito da
$$F(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx & \text{se } u \in C^1(\overline{\Omega}), \\ +\infty & \text{se } u \in L^2(\Omega) \setminus C^1(\overline{\Omega}). \end{cases}$$
Usando la definizione di Γ-convergenza, dimostrare che il rilassato di F rispetto alla topologia forte di $L^2(\Omega)$ è dato da
$$\overline{F}(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx & \text{se } u \in W^{1,2}(\Omega), \\ +\infty & \text{se } u \in L^2(\Omega) \setminus W^{1,2}(\Omega). \end{cases}$$