

Test Diagnostici

Un **test diagnostico** è un metodo usato per diagnosticare una certa malattia: per esempio il Pap test è un metodo per diagnosticare il tumore del collo dell'utero, la glicemia è un metodo per diagnosticare il diabete, ecc. . . .

Un test diagnostico “perfetto” dovrebbe dare esito positivo in tutti i soggetti malati e esito negativo in tutti i soggetti sani. Non esistono test diagnostici perfetti. In generale un test può sbagliare.

Vogliamo studiare il problema dal punto di vista della probabilità.

Test Diagnostici

Definiamo alcuni parametri. Il test viene somministrato a una certa popolazione P il cui numero di individui è indicato con $\#(P)$ ($P =$ popolazione totale). Indichiamo con:

- M^- = insieme dei soggetti sani
 $\#(M^-)$ = numero dei soggetti sani
- M^+ = insieme dei soggetti malati
 $\#(M^+)$ = numero dei soggetti malati

Si ha ovviamente $P = M^- \cup M^+$.

Si chiama **prevalenza della malattia** la probabilità di essere malato, cioè:

$$p(M^+) = \frac{\#(M^+)}{\#(P)}.$$

Test Diagnostici

Indichiamo con

- T^- = insieme dei soggetti con test negativo
- T^+ = insieme dei soggetti con test positivo

Poiché il test diagnostico non è “perfetto”, in generale si ha che

$$T^+ \neq M^+ \quad \text{e} \quad T^- \neq M^-.$$

Test Diagnostici

- Si chiama **sensibilità** del test la probabilità di avere il test positivo se si è malati: $p(T^+|M^+)$.
- Si chiama **specificità** del test la probabilità di avere il test negativo se si è sani: $p(T^-|M^-)$.

Si suppone che questi dati (sensibilità e specificità) siano noti da studi pregressi del test, come pure si suppone che sia nota la prevalenza della malattia per dati epidemiologici.

Test Diagnostici

Supponiamo ora di usare il test come screening di massa.

Alcuni individui di P risulteranno positivi al test (cioè appartenenti a T^+) e altri negativi (cioè appartenenti a T^-).

Osserviamo che $T^+ \cup T^- = P$. A questo punto:

- Un paziente con test positivo si chiede se ha la malattia, ovvero si chiede qual è la probabilità di avere la malattia sapendo che il suo test è positivo. Si osservi che prima di fare il test e di saperne l'esito la sua probabilità di avere la malattia era la prevalenza della malattia, ma ora che ha una informazione in più (l'esito del test), tale probabilità è sperabilmente cambiata.
- Analogamente un paziente con test negativo si chiede qual è la sua probabilità di essere sano.

Test Diagnostici

Si chiama **valore predittivo positivo** del test (V.p.p.) la probabilità di avere la malattia se si ha il test positivo: $p(M^+|T^+)$.

Si chiama **valore predittivo negativo** del test (V.p.n.) la probabilità di non avere la malattia se si ha il test negativo: $p(M^-|T^-)$.

La formula di Bayes implica:

$$\text{V.p.p.} = p(M^+|T^+) = \frac{p(T^+|M^+) p(M^+)}{p(T^+)}$$

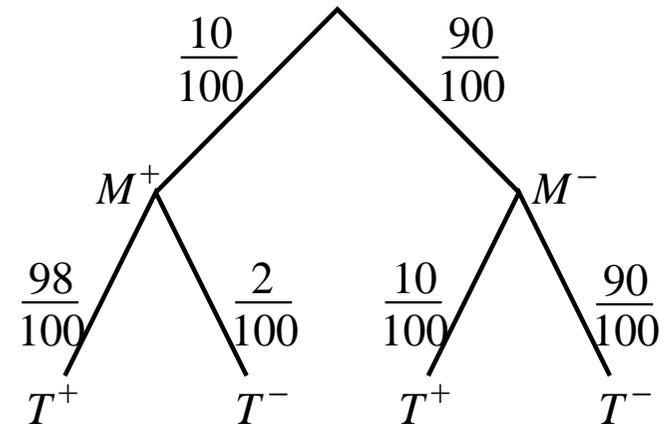
$$\text{V.p.n.} = p(M^-|T^-) = \frac{p(T^-|M^-) p(M^-)}{p(T^-)}$$

Test Diagnostici – Esercizi

Esercizio 1. Un test diagnostico ha specificità pari al 90% e sensibilità pari al 98%. Calcolare i valori predittivi per una prevalenza della malattia del 10%.

Test Diagnostici – Esercizi

Soluzione: costruiamo l'albero



Applicando la formula di Bayes si ottiene il V.p.p.:

$$p(M^+|T^+) = \frac{p(T^+|M^+)p(M^+)}{p(T^+)} = \frac{\frac{98}{100} \cdot \frac{10}{100}}{\frac{98}{100} \cdot \frac{10}{100} + \frac{10}{100} \cdot \frac{90}{100}} = \frac{98}{188}$$

e il valore predittivo negativo:

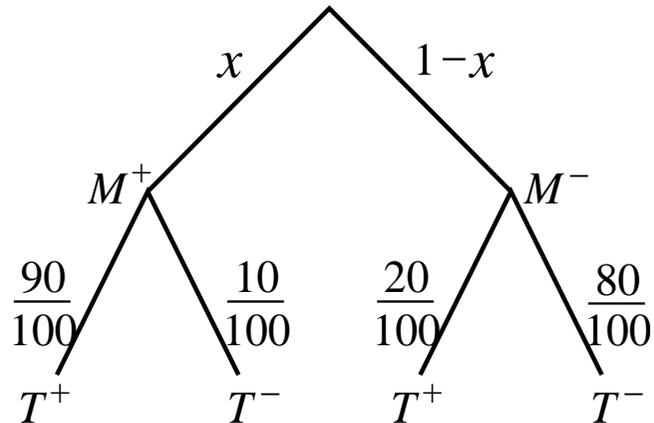
$$p(M^-|T^-) = \frac{p(T^-|M^-)p(M^-)}{p(T^-)} = \frac{\frac{90}{100} \cdot \frac{90}{100}}{\frac{90}{100} \cdot \frac{90}{100} + \frac{2}{100} \cdot \frac{10}{100}} = \frac{810}{812}$$

Test Diagnostici – Esercizi

Esercizio 2. Un test diagnostico con sensibilità del 90% e specificità dell'80% viene messo a punto per diagnosticare una certa malattia. Qual è la prevalenza di tale malattia se il valore predittivo positivo è del 60%? In corrispondenza di tale valore, calcolare il valore predittivo negativo del test.

Test Diagnostici – Esercizi

Soluzione: questa volta l'incognita è la prevalenza e l'albero è il seguente:



Applicando la formula di Bayes si ottiene il V.p.p.:

$$\frac{60}{100} = p(M^+|T^+) = \frac{p(T^+|M^+)p(M^+)}{p(T^+)} = \frac{\frac{90}{100} \cdot x}{\frac{90}{100} \cdot x + \frac{20}{100} \cdot (1-x)}$$

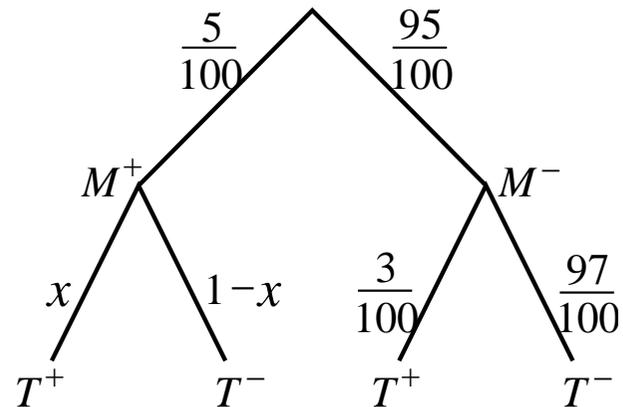
Risolvendo l'equazione di primo grado in x , si ottiene $x = \frac{1}{4}$, cioè una prevalenza del 25%. Il V.p.n. è $\frac{24}{25}$.

Test Diagnostici – Esercizi

Esercizio 3. Un test diagnostico, corrispondente a una malattia che ha prevalenza del 5%, ha specificità pari al 97%. Quale deve essere la sensibilità del test se si vuole che la probabilità di essere falsi negativi sia pari all'1%? Trovare il corrispondente valore predittivo positivo del test.

Test Diagnostici – Esercizi

Soluzione: questa volta l'incognita è la sensibilità e l'albero è il seguente:



I falsi negativi sono gli individui che hanno il test negativo, ma che hanno la malattia:

$$p(M^+ \cap T^-) = p(T^- | M^+) \cdot p(M^+) \Leftrightarrow \frac{1}{100} = (1-x) \cdot \frac{5}{100} \Leftrightarrow x = \frac{4}{5} = 80\%$$

$$\text{V.p.p.} = p(M^+ | T^+) = \frac{p(T^+ | M^+) \cdot p(M^+)}{p(T^+)} \simeq 0.58$$

Test Diagnostici – Esercizi

Esercizio 4. Un test diagnostico ha specificità e sensibilità pari al 95%. Il test viene applicato a una popolazione di 4000 soggetti, nella quale la prevalenza della malattia è del 6%.

- Quanti veri negativi ci si può attendere?
- Quanti veri positivi ci si può attendere?
- Qual è il valore predittivo positivo del test?
- Qual è il valore predittivo negativo del test?

Test Diagnostici – Esercizi

Soluzione: i veri negativi sono gli individui che hanno il test negativo e non sono malati.

$$p(T^- \cap M^-) = \frac{95}{100} \cdot \frac{94}{100}.$$

Quindi, ci aspettiamo $\frac{95}{100} \cdot \frac{94}{100} \cdot 4000 = 3572$ veri negativi su tutta la popolazione.

I veri positivi sono gli individui che hanno il test positivo e sono malati.

$$p(T^+ \cap M^+) = \frac{95}{100} \cdot \frac{6}{100}.$$

Quindi, ci aspettiamo $\frac{95}{100} \cdot \frac{6}{100} \cdot 4000 = 228$ veri positivi su tutta la popolazione.

Il V.p.p. del test è $\frac{57}{104} \simeq 54.8\%$. Il V.p.n. del test è $\frac{893}{896} \simeq 99.7\%$.

Test Diagnostici – Esercizi

Esercizio 5. Viene effettuato un test diagnostico su una popolazione di 200 individui, di cui 40 malati e 160 sani. Sapendo che 32 malati sono risultati positivi al test e 152 individui sani sono risultati negativi al test, calcolare prevalenza della malattia, sensibilità, specificità e valori predittivi del test.

Test Diagnostici – Esercizi

Soluzione: la prevalenza della malattia è

$$p(M^+) = \frac{40}{200} = 20\%.$$

La sensibilità del test è

$$p(T^+ | M^+) = \frac{32}{40} = 80\%,$$

mentre la specificità del test è

$$p(T^- | M^-) = \frac{152}{160} = 95\%,$$

A questo punto abbiamo tutti i dati per calcolare i valori predittivi. Il V.p.p. del test è $\frac{4}{5} = 80\%$. Il V.p.n. del test è $\frac{760}{800} = 95\%$.

Esercizi di Ricapitolazione

Esercizio 1. Determinare ascissa e ordinata dei punti di massimo e minimo **assoluti** della funzione

$$f(x) = (x^2 - x - 1)e^x$$

nell'intervallo $[-1, 2]$.

Esercizi di Ricapitolazione

Esercizio 2. La durata media in ore di un insieme di componenti elettronici è stata calcolata e riportata nella seguente tabella (si suppone che i dati siano distribuiti uniformemente all'interno di ciascuna classe):

classe	f_i
300 – 350	15
350 – 400	30
400 – 450	50
450 – 500	5
	100

Calcolare la media. Usando l'istogramma delle frequenze o l'ogiva di frequenza, calcolare la mediana.