Esercizi

Esercizio 4. Un'urna contiene inizialmente 2 palline bianche e 4 palline rosse. Si effettuano due estrazioni con la seguente modalità: se alla prima estrazione esce una pallina bianca, la si rimette nell'urna prima di procedere alla seconda estrazione; se invece alla prima estrazione esce una pallina rossa, si effettua direttamente la seconda estrazione senza rimettere la pallina nell'urna.

Rappresentando le estrazioni con un grafo ad albero, calcolare la probabilità che:

- le palline estratte siano tutte e due rosse; Soluzione: $\frac{2}{5}$
- le palline estratte (in ordine qualunque) siano una rossa e una bianca. Soluzione: $\frac{22}{45}$

Esercizio 5. Calcolare la probabilità che in una famiglia con 3 figli tutti e tre siano femmine:

- senza disporre di altre informazioni; Sol.ne: $\frac{1}{8}$
- sapendo già che almeno uno dei figli è una femmina; Sol.ne: $\frac{1}{7}$
- sapendo già che la primogenita è una femmina; Sol.ne: $\frac{1}{4}$

Considerare equiprobabili gli eventi "nascita di un maschio" e "nascita di una femmina".

Eventi Indipendenti

Due eventi A e B sono indipendenti se la probabilità che accadano entrambi è il prodotto della probabilità che accada A per la probabilità che accada B:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B).$$

Per definizione di probabilità condizionata, due eventi A e B (se la probabilità di B è diversa da 0) sono indipendenti se e solo se la probabilità di A condizionata al verificarsi di B è uguale alla probabilità di B:

$$p(A \mid B) = p(A).$$

Osserviamo che la definizione di eventi indipendenti è simmetrica in A e B.

Eventi Indipendenti

Dire che A e B sono indipendenti significa che sapere se B si è verificato o no, non dà alcuna informazione che modifichi la previsione del verificarsi di A e analogamente, sapere che A si è verificato non dà alcuna informazione che modifichi la previsione del verificarsi di B.

Qualunque sia A, l'insieme vuoto e A sono eventi indipendenti.

Qualunque sia A, l'insieme Ω e A sono indipendenti.

Esempio 1: nel lancio di due dadi, l'esito relativo al secondo dado è indipendente dall'esito relativo al primo.

Esempio 2: nell'estrazione di due palline da un'urna senza reimbussolamento, l'esito relativo alla seconda pallina non è invece indipendente dall'esito relativo alla prima.

Eventi Indipendenti – Esempio

Consideriamo il lancio di un dado. Gli eventi:

- $A = \{\textit{esce un numero primo}\}$
- $B = \{\textit{esce un numero divisibile per } 3\}$

sono eventi indipendenti. Infatti,

$$p(A) = \frac{1}{2} \qquad p(B) = \frac{1}{3}$$

L'unico numero primo divisibile per 3 è 3, cioè $A \cap B = \{3\}$.
Si ha quindi:

$$p(A \cap B) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = p(A) \cdot p(B).$$

Formula di Bayes – Esempio

Come varia la probabilità assegnata a un evento al crescere delle informazioni assunte?

Esempio *(nella vita quotidiana)*. Se a priori pensiamo che un amico molto probabilmente non è bugiardo, la terza volta che scopriamo che ci ha mentito, saremo certamente meno disposti a credergli per il futuro.

Formula di Bayes – Esempio

Esempio *(tecnico)*. Supponiamo di avere due urne uguali all'esterno. Una delle due, che indichiamo con U_1, contiene 9 palline bianche e 1 nera; l'altra, che indichiamo con U_2, ne contiene 9 nere e 1 bianca. A **priori** possiamo scegliere una delle due urne in una situazione dall'esterno *(per noi che non ne possiamo vedere il contenuto)* simmetrica.

Supponiamo di scegliere una delle due urne (con probabilità 1/2 ciascuna). Estraiamo una pallina e la guardiamo: è bianca.

Domanda 1. Siamo ancora disposti a pensare che ci troviamo di fronte all'urna U_1 con probabilità 1/2?

Domanda 2. Estraiamo un'altra pallina dalla stessa urna senza reimbussolare la prima: è bianca. Siamo ancora disposti a pensare che ci troviamo di fronte all'urna U_1 con probabilità 1/2?

Formula di Bayes – Esempio

La risposta alla seconda domanda è ovvia:

- l'urna U_2 contiene una sola pallina bianca
- sono state estratte due palline bianche
- è impossibile che sia stata scelta U_2, quindi certamente è stata scelta U_1

A posteriori, la probabilità di aver scelto U_2 è 0, mentre la probabilità di aver scelto U_1 è 1.

A priori, la probabilità di aver scelto U_1 e quella di aver scelto U_2 erano entrambe $1/2$.

Formula di Bayes – Esempio

La risposta alla prima domanda è più complessa, perché

- da entrambe le urne è possibile estrarre una pallina bianca
- da U_1 è molto probabile estrarre una pallina bianca ($p = 9/10$)
- da U_2 è poco probabile estrarre una pallina bianca ($p = 1/10$)

Dunque è più probabile sia stata scelta U_1. Ma quanto più probabile?

- Dai dati del problema conosciamo la probabilità di estrarre una pallina bianca, se è stata scelta l'urna U_1, cioè $p(\textit{bianca} \,|\, U_1)$
- Vogliamo conoscere la probabilità di essere di fronte all'urna U_1, sapendo che è stata estratta una pallina bianca, cioè $p(U_1 \,|\, \textit{bianca})$

Formula di Bayes

Formula di Bayes: esprime la probabilità condizionata di A dato B, in funzione della probabilità condizionata di B dato A

$$p(A \mid B) = \frac{p(B \mid A) \cdot p(A)}{p(B)}.$$

Segue banalmente dalla definizione di probabilità condizionata

$$p(A \cap B) = p(A \mid B) \cdot p(B) \qquad \text{e} \qquad p(B \cap A) = p(B \mid A) \cdot p(A)$$

$$\Rightarrow \quad p(A \mid B) \cdot p(B) = p(B \mid A) \cdot p(A)$$

Formula di Bayes – Esempio

Nell'esempio precedente:

$$A = \{\textit{scelta dell'urna } U_1\}, \quad B = \{\textit{pallina bianca}\}$$

Pertanto,

$$p(B \mid A) = \frac{9}{10}, \quad p(A) = \frac{1}{2}, \quad p(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{2}$$

Dalla formula di Bayes

$$p(A \mid B) = \frac{p(B \mid A) \cdot p(A)}{p(B)} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{9}{10}$$

Formula di Bayes

Supponiamo che lo spazio degli eventi Ω sia l'unione di due sottospazi A_1, A_2 disgiunti.

Allora, qualunque evento $B \subset \Omega$ può essere decomposto nei due eventi incompatibili $B \cap A_1$ e $B \cap A_2$:

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \quad \text{con } (B \cap A_1) \cap (B \cap A_2) = \emptyset$$

Dalla proprietà di additività di p e dalla definizione di probabilità condizionata, segue:

$$p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) = p(B \,|\, A_1) \cdot p(A_1) + p(B \,|\, A_2) \cdot p(A_2)$$

La formula di Bayes può essere riscritta:

$$p(A_1 \,|\, B) = \frac{p(B \,|\, A_1) \cdot p(A_1)}{p(B \,|\, A_1) \cdot p(A_1) + p(B \,|\, A_2) \cdot p(A_2)}$$

Formula di Bayes – Esempio

Supponiamo di giocare a *testa* o *croce* con una persona sconosciuta. Vinciamo se esce *testa*, perdiamo se esce *croce*.

A **priori** ci fidiamo abbastanza della persona con cui stiamo giocando e attribuiamo al fatto che possa aver truccato la moneta a suo favore, una probabilità pari a $\frac{1}{100}$.

Se perdiamo per 10 lanci consecutivi, il nostro grado di fiducia nell'altro giocatore resta sempre lo stesso?

Formula di Bayes – Esempio

Come cambia la probabiltà 0.01 di fronte a un ripetersi di fatti, che fa propendere per una probabilità di trucco maggiore?

Consideriamo gli eventi:

$$T = \{\textit{la moneta è truccata}\}, \quad N = \{\textit{la moneta non è truccata}\}$$

$$A = \{\textit{perdo per 10 volte}\} = \{\textit{escono 10 croci consecutive}\}$$

A priori sappiamo che

$$p(T) = \frac{1}{100}, \quad p(N) = \frac{99}{100}, \quad p(A\,|\,T) = 1, \quad p(A\,|\,N) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

Applicando la formula di Bayes modificata:

$$p(T\,|\,A) = \frac{p(A\,|\,T)\cdot p(T)}{p(A\,|\,T)\cdot p(T) + p(A\,|\,N)\cdot p(N)} = \frac{1\cdot\frac{1}{100}}{1\cdot\frac{1}{100} + \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\cdot\frac{99}{100}} \approx 0.91$$

Formula di Bayes – Esercizi

Esercizio. Da un rilevamento statistico è noto che una certa popolazione è composta per il 40% da fumatori abituali. È noto inoltre che il 5% dei decessi avviene a causa di un certo tipo di tumore. Infine, si è constatato che tra quanti sono deceduti a causa di quel tipo di tumore il 60% erano fumatori abituali. Calcolare la probabilità per i fumatori abituali di morire per un tumore di quel tipo.

Soluzione: consideriamo gli eventi:

$$F = \{\textit{essere fumatore abituale}\}, \quad N = \{\textit{morire di tumore}\}$$

A priori sappiamo che

$$p(F) = \frac{40}{100}, \quad p(N) = \frac{5}{100}, \quad p(F \,|\, N) = \frac{60}{100}$$

Applicando la formula di Bayes:

$$p(N \,|\, F) = \frac{p(F \,|\, N) \cdot p(N)}{p(F)} = \frac{3}{40} \approx 0.075$$

La probabilità per i fumatori di morire per un tumore di quel tipo è del 7.5%.

Esercizio. In Italia il 44.99% della popolazione maschile soffre di una qualche malattia cronica. Sapendo che il 48.54% della popolazione italiana è maschile e che il 49.75% della popolazione soffre di una malattia cronica, qual è la probabilità che un malato cronico sia donna? L'avere una malattia cronica è un evento indipendente dal sesso o no?

Formula di Bayes – Esercizi

Soluzione: consideriamo gli eventi:

$C = \{\textit{avere una malattia cronica}\}$, $M = \{\textit{essere maschio}\}$, $F = \{\textit{essere femmina}\}$

A priori sappiamo che

$$p(C \mid M) = 0.4499, \quad p(M) = 0.4854, \quad p(C) = 0.4975$$

Applicando la formula di Bayes:

$$p(M \mid C) = \frac{p(C \mid M) \cdot p(M)}{p(C)} = \frac{0.4499 \cdot 0.4854}{0.4975} \approx 0.4390$$

La probabilità che un malato cronico sia maschio è del 43.9%. Pertanto

$$p(F \mid C) = 1 - p(M \mid C) \approx 0.5610$$

cioè, la probabilità che un malato cronico sia femmina è del 56.1%.
Infine, siccome

$$p(C) = 0.4975 \neq 0.4499 = p(C \mid M),$$

gli eventi C e M non sono indipendenti.