Calcolo delle Probabilità

Il calcolo delle probabilità studia i modelli matematici delle cosiddette situazioni di incertezza.

Molte situazioni concrete sono caratterizzate a priori da incertezza su quello che accadrà nel futuro:

- è molto probabile che domani nevichi
- è poco probabile che uno studente che durante le lezioni di matematica non ha mai distolto lo sguardo dal suo cellulare, superi l'esame finale
- il test diagnostico è affidabile al 90%

Non vi è certezza sull'esito, ma neppure totale incertezza.

L'incertezza non significa comunque totale mancanza di informazione. L'incertezza dipende dall'informazione a disposizione.

Il calcolo delle probabilità si propone di fornire una misura quantitativa dell'incertezza (o del rischio) connaturata ad un evento aleatorio.

Calcolo delle Probabilità – Esempi

1) Consideriamo una moneta con la scritta 1 su una faccia e con la scritta 2 sull'altra. Vogliamo fare una previsione sul fatto che il lancio della moneta dia come esito il numero 1.
2) Consideriamo un dado con le facce numerate da 1 a 6. Vogliamo fare una previsione sul fatto che il lancio del dado dia come esito il numero 1.

- In entrambi i casi l'esito di un lancio è incerto.
- L'incertezza non è completa: *è più facile che esca 1 lanciando la moneta che lanciando il dado.*

Applicazioni della Teoria della Probabilità: gioco d'azzardo, meccanica statistica, ereditarietà, teoria dei giochi, . . .

Definizione di Probabilità

1. Definizione classica
2. Definizione frequentista
3. Definizione soggettiva
4. Definizione assiomatica

Definizione Classica

Supponiamo che un esperimento abbia N esiti possibili incompatibili tra di loro ed equiprobabili e che n di questi esiti siano favorevoli al verificarsi di un certo evento E. Si definisce probabilità $p(E)$ dell'evento il rapporto

$$p(E) = \frac{n}{N} = \frac{\text{numero di casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}}.$$

("esiti incompatibili" vuol dire: se se ne verifica uno, non può verificarsi l'altro)

Esempio. Supponiamo di lanciare un dado non truccato:

- la probabilità che esca 1 è $1/6$;
- la probabilità che esca un numero maggiore di 2 è $4/6 = 2/3$;
- la probabilità che esca un numero pari è $3/6 = 1/2$.

Definizione Classica – Esempi

Esempio 1. Qual è la probabilità che sabato prossimo il primo estratto sulla ruota di Napoli sia il numero 57?

Poiché il primo estratto sulla ruota di Napoli è scelto tra 90 numeri (equiprobabili), i casi possibili sono 90 e quello favorevole è 1, dunque la probabilità risulta essere 1/90.

Esempio 2. Qual è la probabilità che sabato prossimo il secondo estratto sulla ruota di Napoli sia il numero 57?

Il medesimo ragionamento, usato nell'esempio precedente, porta a concludere che la probabilità è ancora 1/90.

Definizione Classica – Esempi

Esempio 3. Qual è la probabilità che sabato prossimo il secondo estratto sulla ruota di Napoli sia il numero 57, sapendo che il primo estratto non è il numero 57?

Dopo la prima estrazione i numeri disponibili non sono più 90, ma 89 e quindi la probabilità è 1/89.

(Se invece sapessimo che il primo estratto è proprio il 57, la probabilità risulterebbe 0, perché dopo la prima estrazione il 57 non è più disponibile.)

La probabilità dipende dall'informazione a disposizione di chi la calcola!

Definizione Classica – Esercizi

Esercizio 1. Qual è la probabilità che, lanciando contemporaneamente due dadi, la somma delle uscite sia 5?

casi possibili: tutte le coppie *(equiprobabili)* ordinate di numeri naturali fra 1 e 6

casi favorevoli: le coppie ordinate $(1,4)$, $(2,3)$, $(3,2)$, $(4,1)$

$$\Longrightarrow \quad \text{probabilità} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Nota: la somma delle uscite di due dadi è un numero compreso fra 2 e 12. Avremmo potuto considerare come casi possibili i numeri compresi tra 2 e 12, ma non sarebbe stato possibile applicare la definizione classica, in quanto tali somme **non** sono equiprobabili: ad esempio, il numero 2 si ottiene solo come somma di 1 dal primo dado e 1 dal secondo, mentre il numero 4 si può ottenere come $1+3$, $2+2$, $3+1$, ...

Definizione Classica – Esercizi

Esercizio 2. Qual è la probabilità che, lanciando contemporaneamente due dadi, la somma delle uscite sia 7? E che sia 12?

Soluzione: $1/6$ e $1/36$

Definizioni di Probabilità

Definizione frequentista: la probabilità di un evento E (per esempio l'uscita di testa nel lancio di una moneta) è il limite a cui tende il rapporto n/N, dove n è il numero di teste e N è il numero di lanci totali, quando N tende all'infinito. La probabilità $p(E)$ dell'evento è il limite delle frequenze relative:

$$p(E) = \lim_{N \to +\infty} \frac{F_{ass}}{N}.$$

Definizione soggettiva: considerato un evento E, la probabilità $p(E)$, che un soggetto attribuisce all'evento E, è un numero reale che misura il grado di fiducia che un individuo *coerente* attribuisce, secondo le sue informazioni e opinioni, all'avverarsi di E.

Definizione assiomatica: si definisce la misura di probabilità su uno spazio degli eventi Ω, tramite alcune proprietà *(assiomi)*.

Probabilità – Proprietà

Sia Ω un insieme finito, che chiamiamo spazio degli eventi. Si dice evento un qualunque sottoinsieme di Ω. Una misura di probabilità su Ω è una funzione p che associa a ogni sottoinsieme E di Ω un numero reale tale che:

1. $0 \leq p(E) \leq 1$ per ogni $E \subseteq \Omega$;
2. $p(\Omega) = 1$ (evento certo), $p(\emptyset) = 0$ (evento impossibile);
3. per ogni coppia di sottoinsiemi E, F contenuti in Ω, tali che $E \cap F = \emptyset$ (eventi incompatibili), vale: $p(E \cup F) = p(E) + p(F)$.

evento elementare: ogni sottoinsieme di Ω formato da un unico elemento

eventi incompatibili: E, F sono incompatibili se il verificarsi dell'uno esclude il verificarsi dell'altro: $E \cap F = \emptyset$

evento complementare: il complementare di E è l'evento che si verifica quando E non si verifica (la probabilità del complementare è $1 - p(E)$).

Probabilità – Esempi

Esempio 1. Nel lancio di un dado:

- lo spazio degli eventi è $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $\{2, 3\} = \{esce\ 2\ \ o\ esce\ 3\}$ e $\{3, 6\} = \{esce\ un\ multiplo\ di\ 3\}$ sono eventi
- l'evento $\{2\} = \{esce\ il\ numero\ 2\}$ è un evento elementare
- l'evento $\{2, 4, 6\} = \{esce\ un\ numero\ pari\}$ non è un evento elementare

Esempio 2. Nel lancio di una moneta $\Omega = \{testa, croce\}$. L'evento complementare di $\{testa\}$ è $\{croce\}$. I due eventi sono incompatibili.

Probabilità – Esempi

Esempio 3. Nel lancio di un dado:

- l'evento complementare di $\{2, 4, 6\} = \{\textit{esce un numero pari}\}$ è $\{1, 3, 5\} = \{\textit{esce un numero dispari}\}$
- l'evento complementare di $\{4\} = \{\textit{esce il numero } 4\}$ è $\{1, 2, 3, 5, 6\} = \{\textit{esce un numero diverso da } 4\}$
- gli eventi $\{\textit{esce un numero pari}\}$ e $\{\textit{esce il numero } 5\}$ sono incompatibili
- gli eventi $\{\textit{esce un numero pari}\}$ e $\{\textit{esce un multiplo di } 3\}$ sono compatibili

Probabilità – Esercizi

Esercizio 1. In un'urna ci sono 4 palline nere e 5 bianche. Ne viene estratta una. Qual è la probabilità che sia bianca?

Soluzione: Indichiamo con N_1, N_2, N_3, N_4 le 4 palline nere e con B_5, B_6, B_7, B_8, B_9 le 5 palline bianche.

$$\Omega = \{N_1, \dots, N_4, B_5, \dots, B_9\}$$

Poiché non c'è trucco:

$$p(N_1) = p(N_2) = \cdots = p(B_5) = \cdots = p(B_9) = \frac{1}{9}$$

Calcoliamo:

$$p(\{B_5, \dots, B_9\}) = p(B_5) + \cdots + p(B_9) = \frac{5}{9}$$

La probabilità che la pallina estratta sia bianca è $\frac{5}{9}$.

Probabilità – Esercizi

Esercizio 2. Nelle ipotesi dell'esercizio precedente si estrae una prima pallina senza guardarla. Successivamente se ne estrae un'altra, sempre senza guardare la prima. Qual è la probabilità che la seconda pallina sia bianca?

Soluzione 1: possiamo scegliere come Ω l'insieme di tutte le coppie *ordinate* di palline. Tale spazio degli eventi contiene $9 \cdot 8 = 72$ elementi. Ciascun elemento, per simmetria, ha esattamente probabilità $1/72$.

L'insieme di cui dobbiamo trovare la probabilità è formato dalle coppie con la seconda pallina bianca e quindi contiene $4 \cdot 5 + 5 \cdot 4 = 40$ elementi.

La sua probabilità è $\dfrac{1}{72} \cdot 40 = \dfrac{5}{9}$.

Soluzione 2: l'operazione effettuata prima della seconda estrazione è assolutamente ininfluente (cioè, non fornisce alcuna informazione). In quest'ottica lo spazio degli eventi è

$$\Omega' = \{N_1, \dots, N_4, B_5, \dots, B_9\}.$$

La probabilità di ogni elemento è 1/9.

L'evento di cui vogliamo calcolare la probabilità è $\{B_5, \dots, B_9\}$. Quindi, la sua probabilità è 5/9.

Esercizio 3. Nelle ipotesi dell'esercizio precedente, supponiamo di guardare la prima pallina estratta e scoprire che è bianca. Qual è la probabilità che la seconda pallina sia bianca?

Soluzione: lo spazio degli eventi *relativo alla seconda estrazione* contiene solo 4 palline bianche e 4 nere.

La probabilità cercata è pertanto $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

Osservazioni:

- La scelta dello spazio degli eventi non è unica. Tale spazio non è assegnato a priori dal problema, ma fa parte del modello matematico.
- La probabilità dipende in modo essenziale dall'informazione a disposizione di chi la calcola.

Probabilità Condizionata

Come varia la probabilità al variare della conoscenza, ovvero delle informazioni in possesso di chi la calcola?

Esempio. Calcolare la probabilità che in un'estrazione della tombola sia uscito il 9 o il 25, sapendo che è uscito un multiplo di 3.

Nella tombola i casi a priori possibili sono 90. L'informazione che il numero estratto è multiplo di tre riduce i casi possibili ai multipli di 3 compresi tra 1 e 90, che sono esattamente 30. Inoltre, solo il 9 è multiplo di 3, pertanto c'è un solo caso favorevole all'evento su 30 possibili ed equiprobabili, dunque la probabilità richiesta è 1/30.

Probabilità Condizionata

Dati due eventi A e B, si definisce probabilità condizionata dell'evento A dato l'evento B (ossia la probabilità che si verifichi A sapendo che si è verificato B), la quantità

$$p(A \,|\, B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Nell'esempio precedente:

$A = \{9, 25\}$, $\quad B = \{\textit{multipli di } 3\}$, $\quad A \cap B = \{9\}$

Quindi, $p(B) = \dfrac{30}{90} = \dfrac{1}{3}$, $\quad p(A \cap B) = \dfrac{1}{90}$

Pertanto, $p(A \,|\, B) = \dfrac{1/90}{1/3} = \dfrac{1}{30}$

Probabilità Condizionata

Probabilità condizionata:

$$p(A \mid B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \quad (\text{se } p(B) \neq 0)$$

Notare che la formula non è simmetrica. In generale, si ha $p(A \mid B) \neq p(B \mid A)$.

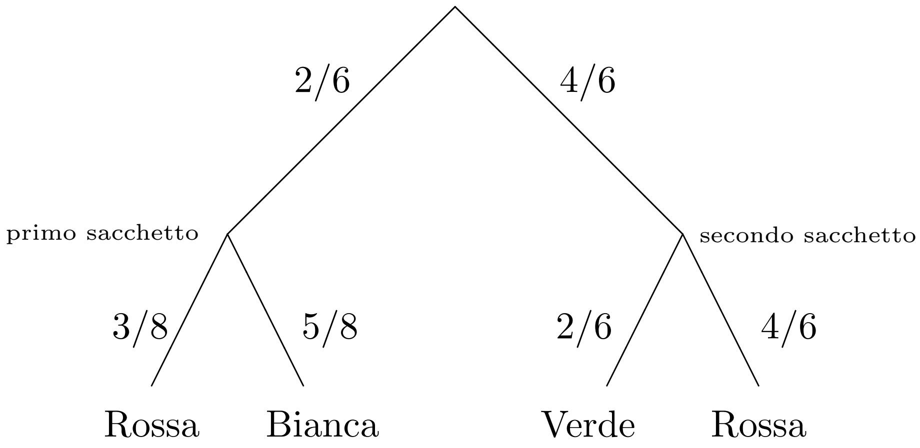
Nei casi concreti è frequente che si conosca la probabilità di A dato B e la probabilità di B e si sia interessati a calcolare la probabilità che gli eventi A e B accadano contemporaneamente, cioè la probabilità di $A \cap B$. Dalla definizione precedente si ricava:

$$p(A \cap B) = p(A \mid B) \cdot p(B).$$

Grafi ad Albero

Esercizio. Due sacchetti contengono il primo 5 palline bianche e 3 rosse, il secondo 4 palline rosse e 2 verdi. Tiriamo un dado: se esce 1 o 2 prendiamo una pallina dal primo sacchetto, se esce un numero diverso la prendiamo dall'altro. Qual è la probabilità che la pallina estratta sia bianca? e che sia rossa? e che sia verde?

Possiamo rappresentare la situazione con un grafo ad albero.



Soluzione: la probabilità che la pallina sia bianca è $\frac{2}{6} \cdot \frac{5}{8}$, che sia verde è $\frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6}$, che sia rossa è $\frac{2}{6} \cdot \frac{3}{8} + \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6}$.

Esercizi

Esercizio 1. In un'urna sono contenute 6 palline, numerate da 1 a 6. Calcolare la probabilità che, effettuando due estrazioni senza rimettere le palline estratte nell'urna, esca:

- la coppia di numeri 1 e 2, in questo ordine di uscita; Sol.ne: $\frac{1}{30}$
- la coppia di numeri 1 e 2, a prescindere dall'ordine di uscita; Sol.ne: $\frac{1}{15}$
- una coppia di numeri uguali tra loro; Sol.ne: 0
- una coppia di numeri diversi tra loro; Sol.ne: 1
- una coppia di numeri entrambi dispari; Sol.ne: $\frac{1}{5}$
- una coppia di numeri la cui somma sia 6; Sol.ne: $\frac{2}{15}$
- una coppia di numeri la cui somma sia 7. Sol.ne: $\frac{1}{5}$

Esercizi

Esercizio 2. Qual è la probabilità che in una targa automobilistica a 6 cifre tutte le cifre siano tra loro distinte?

Soluzione: $\dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{10^5} \simeq 0.15$

Esercizio 3. In uno dei 5 giorni di una settimana lavorativa (da lunedì a venerdì) 5 pazienti devono sottoporsi a una visita di controllo. Supponendo che per ciascun paziente la scelta del giorno avvenga in modo casuale, calcolare la probabilità che:

- i cinque pazienti si presentino lo stesso giorno
  Soluzione: $\dfrac{1}{5^4}$
- i cinque pazienti si presentino in giorni distinti
  Soluzione: $\dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5^4}$