Integrali

Il concetto di integrale nasce per risolvere due classi di problemi:

- calcolo delle aree di figure delimitate da curve, calcolo di volumi, calcolo del lavoro di una forza, calcolo dello spazio percorso, ...

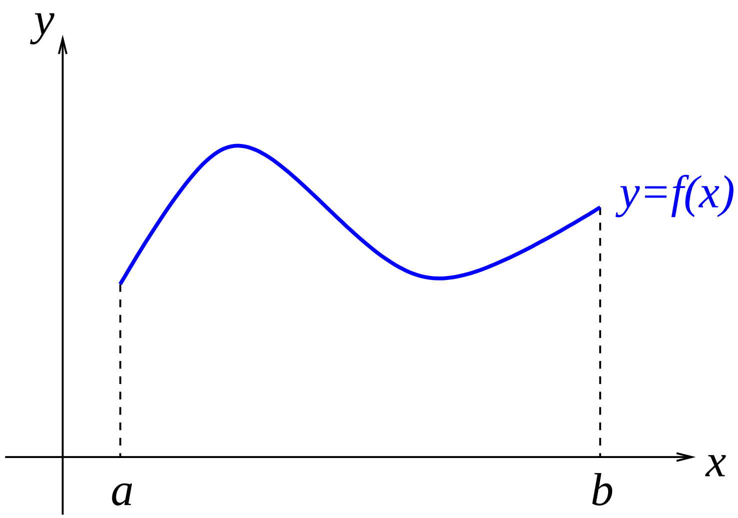
  $\rightsquigarrow$ integrale definito

- problema inverso del calcolo della derivata:
  data una funzione f, trovare una funzione F tale che $F' = f$

  $\rightsquigarrow$ integrale indefinito

Integrale Definito: Calcolo delle Aree

Vogliamo calcolare l'area del trapezoide individuato dal grafico di una funzione positiva f, definita e continua su un intervallo $[a, b]$.

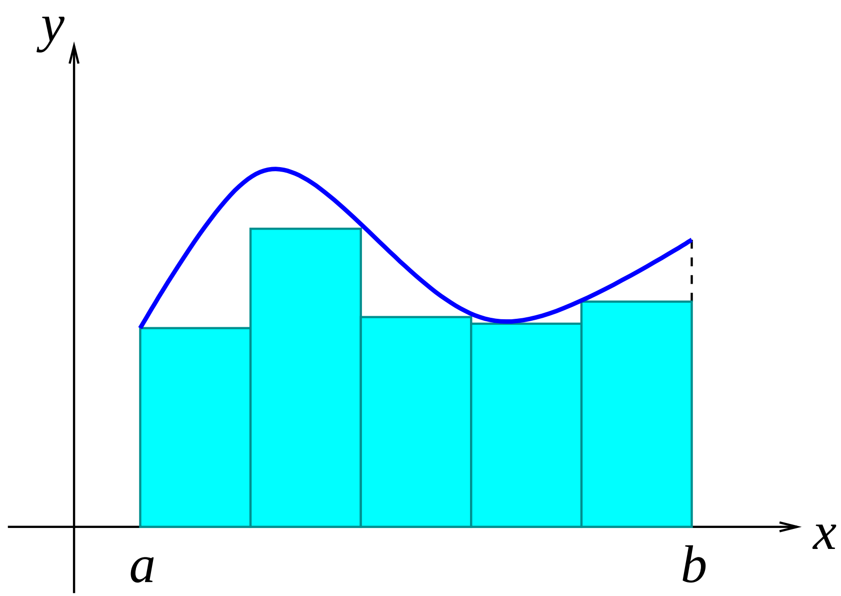


Se f è una costante o un polinomio di primo grado, il problema è banale. Se f è una funzione generica, il problema è molto più complicato.

Integrale Definito: Calcolo delle Aree

Possiamo approssimare l'area del trapezoide considerando dei rettangoli inscritti e dei rettangoli circoscritti.

Suddividendo l'intervallo $[a, b]$ in n parti, otteniamo n rettangoli di base $\ell = \dfrac{b-a}{n}$. Indichiamo con m_i il minimo di f sull'i-esimo intervallo.

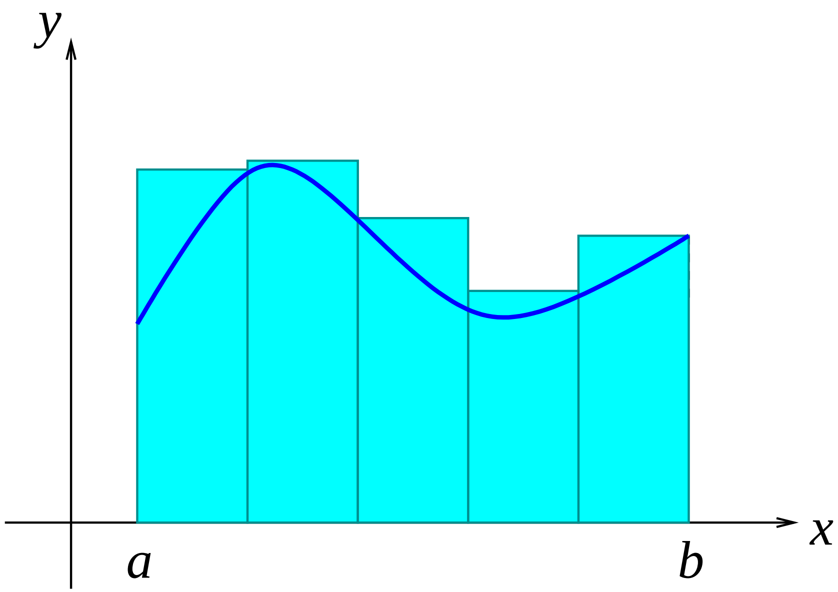


L'area s_n del plurirettangolo inscritto è data da

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \ell$$

Integrale Definito: Calcolo delle Aree

Indichiamo con M_i il massimo di f sull'i-esimo intervallo.



L'area S_n del plurirettangolo circoscritto è data da

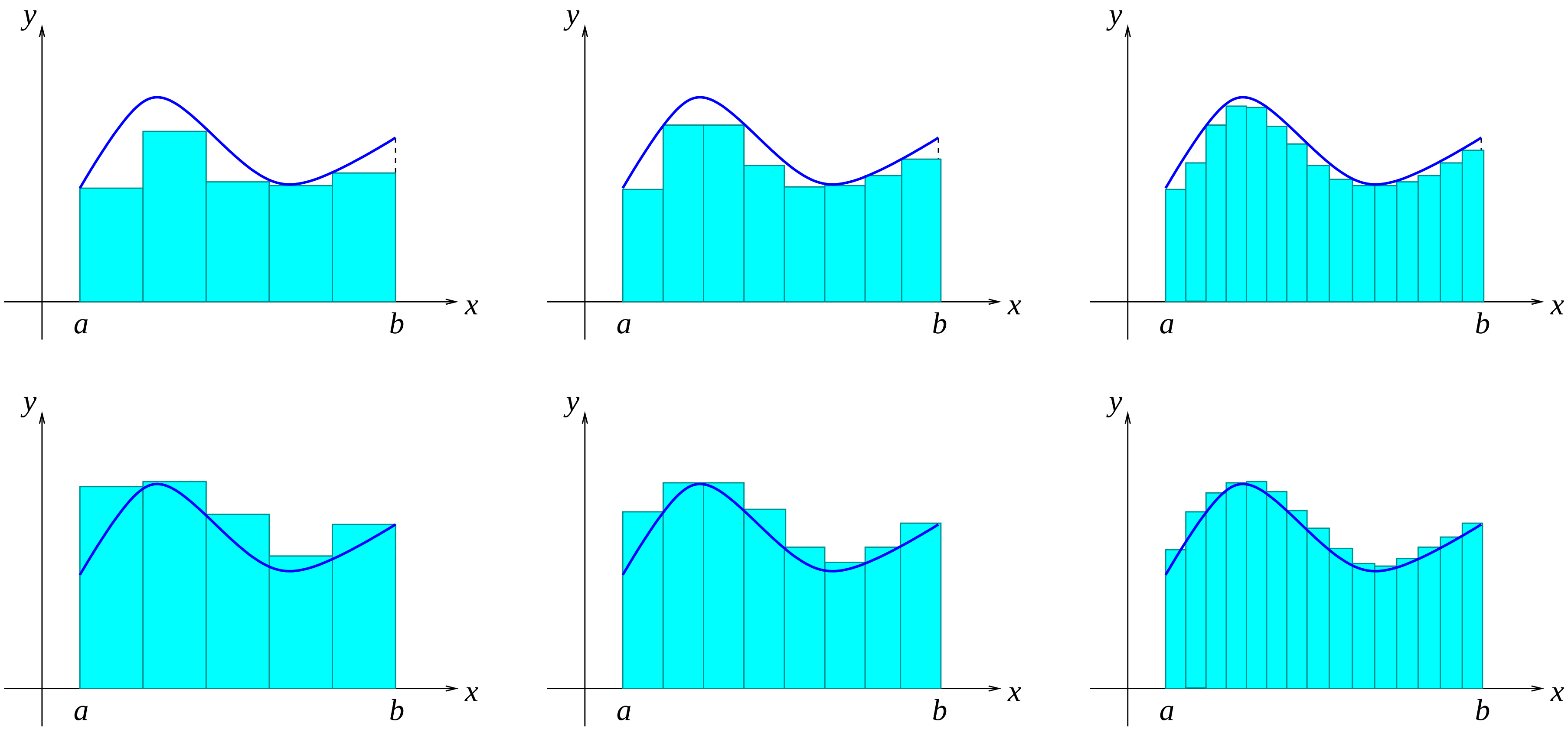
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \ell$$

L'area S del trapezoide è compresa tra s_n e S_n:

$$s_n \leq S \leq S_n$$

Integrale Definito: Calcolo delle Aree

Aumentando il numero dei rettangoli l'approssimazione di S diventa sempre più precisa.



Integrale Definito: Calcolo delle Aree

Aumentando il numero dei rettangoli l'approssimazione di S diventa sempre più precisa.

Considerando un numero di rettangoli via via crescente, otteniamo due successioni:

aree di plurirettangoli inscritti $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$

aree di plurirettangoli circoscritti $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$

che convergono all'area del trapezoide.

Teorema 1. Se f è una funzione continua e positiva in $[a, b]$, allora le successioni delle aree (s_n) e (S_n) convergono allo stesso limite S uguale all'area del trapezoide:

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} S_n = S.$$

Integrale Definito: Definizione

Le considerazioni precedenti si estendono anche a funzioni continue, *non necessariamente positive* su tutto l'intervallo $[a, b]$.

Data una funzione f definita e continua in $[a, b]$, si chiama integrale definito di f sull'intervallo $[a, b]$ il limite

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \ell = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \ell = S$$

e si indica con il simbolo

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Nota: se f cambia segno in $[a, b]$, l'integrale rappresenta la cosiddetta *area orientata* sottesa dal grafico di f.

Proprietà dell'Integrale Definito

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$

- linearità: $\displaystyle\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ per ogni $k \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b \Big(f(x) + g(x)\Big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

- additività: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

Funzioni Primitive

Il calcolo dell'integrale come limite di somme è estremamente complesso e per nulla conveniente. Occorre quindi trovare un altro metodo per calcolarlo. A questo scopo si introduce il concetto di primitiva.

Si dice che F è una primitiva della funzione f in $[a, b]$ se F è derivabile in $[a, b]$ e risulta

$$F'(x) = f(x) \quad \text{per ogni } x \in [a, b].$$

Il problema del calcolo della primitiva è il *problema inverso* del calcolo della derivata: calcolare la primitiva significa, data una funzione f, trovare un'altra funzione F tale che $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$.

Funzioni Primitive: Alcuni Esempi

- Una primitiva di $2x$ è x^2. Infatti, $D(x^2) = 2x$
- Una primitiva di $\cos x$ è $\sin x$. Infatti, $D(\sin x) = \cos x$
- Una primitiva di $1/x$ in $(0, +\infty)$ è $\ln x$. Infatti, $D(\ln x) = 1/x$
- Una primitiva di e^x è e^x. Infatti, $D(e^x) = e^x$

Osserviamo però che:

$$D(x^2 - 1) = D(x^2 + 5) = D(x^2 + k) = 2x$$

Quindi, anche le funzioni $x^2 - 1$, $x^2 + 5$, $x^2 + k$ sono primitive di $2x$.

Funzioni Primitive

Osservazione. Se F è una primitiva di f, allora anche la funzione

$$G(x) = F(x) + k$$

è una primitiva di f, qualunque sia $k \in \mathbb{R}$. Viceversa, se F e G sono primitive di f, allora F e G differiscono per una costante:

$$G(x) = F(x) + k.$$

In altre parole, una funzione ammette infinite primitive che differiscono tra loro per una costante reale e i cui grafici costituiscono una famiglia infinita di curve ottenibili per traslazione lungo l'asse y.

Integrale Indefinito

L'insieme di tutte le primitive di una funzione f si chiama integrale indefinito di f, si indica col simbolo

$$\int f(x)\,dx$$

e si legge "integrale indefinito di $f(x)$ in dx".

Funzioni Primitive: Alcuni Esempi

$$\int 1\,dx = x + c$$

$$\int 2x\,dx = x^2 + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c$$

Teorema di Torricelli-Barrow

Sia f una funzione continua sull'intervallo $[a, b]$ e sia x un punto in $[a, b]$. Al variare di x in $[a, b]$, l'integrale definito

$$\int_a^x f(t)\,dt$$

assume valori variabili, cioè è una funzione di x, che indichiamo con $F(x)$ e chiamiamo funzione integrale.

Teorema di Torricelli-Barrow. Se f è continua in $[a, b]$, allora la funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

è derivabile e risulta:

$$F'(x) = f(x)\,,$$

cioè la funzione integrale F è una primitiva di f.

Calcolo dell'Integrale Definito

Possiamo finalmente calcolare l'integrale definito

$$\int_a^b f(t)\,dt.$$

Infatti, consideriamo la funzione integrale: per il teorema di Torricelli-Barrow abbiamo

$$\int_a^x f(t)\,dt = G(x) + c\,,$$

dove G è una primitiva di f. Per $x = a$ abbiamo

$$\int_a^a f(t)\,dt = G(a) + c = 0\,,$$

da cui $G(a) = -c$. Per $x = b$ otteniamo

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) + c = G(b) - G(a) = \Big[G(x)\Big]_a^b.$$

Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale. L'integrale definito di una funzione continua f, calcolato sull'intervallo $[a, b]$, è uguale alla differenza tra i valori che una qualunque primitiva di f assume agli estremi dell'intervallo d'integrazione:

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a) = \Big[G(x)\Big]_a^b .$$

Esercizi sugli Integrali

1. Tra le primitive della funzione $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ trovare quella passante per il punto P di coordinate $(0, 3)$.

2. Tra le primitive della funzione $f(x) = e^{3x} + x^2$ trovare quella passante per il punto P di coordinate $(1, 0)$.

3. Calcolare l'area delle seguenti figure piane:

$$A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x^2\}$$

$$B = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2,\ e^x \leq y \leq x^2 + 5\}$$

4. Calcolare l'area delle seguenti figure piane:

$$A = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, \; -e^x \leq y \leq 0\}$$

$$B = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, \; 1 - x^2 \leq y \leq 2\}$$

5. Calcolare l'area della seguente figura piana:

$$C = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 3, \; 0 \leq y \leq f(x)\},$$

dove la funzione f è definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{per } 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{per } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$