

Esercizi

Esercizio della scorsa lezione

Studiare le seguenti funzioni:

(a) $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$

(b) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

(c) $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 1}$

determinandone campo di esistenza, comportamento agli estremi, monotonia, eventuali punti di massimo e minimo, convessità, e tracciarne un grafico qualitativo.

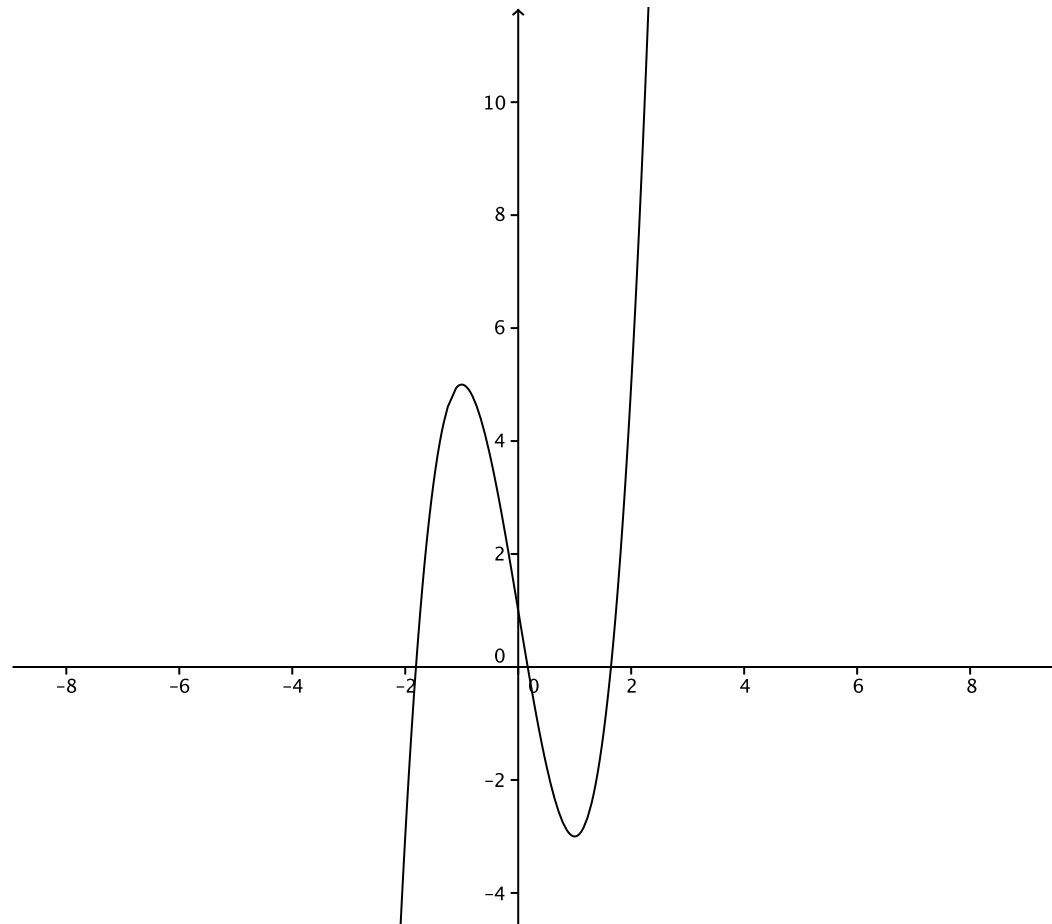
Esercizi

Soluzione (a): $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$

- campo di esistenza: \mathbb{R}
- comportamento agli estremi del dominio: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- monotonia: $f'(x) = 6x^2 - 6$
 f è strettamente crescente in $(-\infty, -1)$ e in $(1, +\infty)$
 f è strettamente decrescente in $(-1, 1)$
 $x = -1$ e $x = 1$ sono punti critici di f
- eventuali punti di massimo e minimo:
 $x = -1$ è un punto di massimo relativo, in cui f vale $f(-1) = 5$
 $x = 1$ è un punto di minimo relativo, in cui f vale $f(1) = -3$
- convessità: $f''(x) = 12x$
 f è convessa in $(0, +\infty)$; f è concava in $(-\infty, 0)$;
 $x = 0$ è un punto di flesso di f

Esercizi

- grafico:



Esercizi

Soluzione (b): $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

- campo di esistenza: \mathbb{R}
- comportamento agli estremi del dominio: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- monotonia: $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$
 - f è strettamente crescente in $(0, +\infty)$
 - f è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$
 - $x = 0$ è un punto critico di f
- eventuali punti di massimo e minimo:
 - $x = 0$ è un punto di minimo assoluto, in cui f vale $f(0) = 0$
- convessità: $f''(x) = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$
 - f è convessa in $(-1, 1)$, f è concava in $(-\infty, -1)$ e in $(1, +\infty)$
 - $x = -1$ e $x = 1$ sono punti di flesso

Esercizi

Soluzione (c): $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 1}$

- campo di esistenza: $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$
- comportamento agli estremi del dominio: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$
 $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$
- monotonia: $f'(x) = \frac{-6x}{(x^2 - 1)^2}$
 f è strettamente crescente in $(-\infty, -1)$ e in $(-1, 0)$
 f è strettamente decrescente in $(0, 1)$ e in $(1, +\infty)$
 $x = 0$ è un punto critico di f
- eventuali punti di massimo e minimo:
 $x = 0$ è un punto di massimo relativo, in cui f vale $f(0) = -2$
- convessità: $f''(x) = \frac{6(1 + 3x^2)}{(x^2 - 1)^3}$
 f è convessa in $(-\infty, -1)$ e in $(1, +\infty)$, f è concava in $(-1, 1)$

Massimi e Minimi Assoluti di una Funzione su $[a, b]$

Problema: determinare massimo e minimo assoluti di una funzione assegnata f su un intervallo dato $[a, b]$.

1. Stabilire se la funzione è continua. Se lo è, essa ha certamente massimo e minimo assoluti in $[a, b]$ (per il Teorema di Weierstrass).
2. Stabilire se la funzione è derivabile e trovare gli eventuali punti in cui non è derivabile.
3. I candidati punti di massimo di una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ sono i seguenti:
 - gli estremi dell'intervallo: a, b ;
 - gli eventuali punti $z \in (a, b)$ in cui la funzione non è derivabile; indichiamo con A questo insieme;
 - gli eventuali punti $\bar{x} \in (a, b)$ in cui la funzione è derivabile e $f'(\bar{x}) = 0$; indichiamo con B tale insieme.

Massimi e Minimi Assoluti di una Funzione su $[a, b]$

4. Il valore massimo (assoluto) è il massimo tra questi valori:

$$f(a), \quad f(b), \quad f(z) \text{ per } z \in A, \quad f(\bar{x}) \text{ per } \bar{x} \in B$$

5. I punti di massimo sono i valori di x tali che $f(x)$ è uguale al valore massimo.

6. Il valore massimo è unico. I punti di massimo non sono necessariamente unici.

Analogamente per i punti di minimo e il valore minimo.

Esercizi

Esercizio 1. Determinare massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$$

nell'intervallo $[0, 2]$.

Esercizio 2. (compito d'esame del 27/02/2013)

Determinare massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x) = \frac{2 - 2x}{x^2 + 3}$$

nell'intervallo $[-3, 0]$.

Esercizi per casa

Esercizio 1. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione

$$f(x) = e^{2x-1} + \cos x$$

nel punto $x = 0$.

Esercizio 2. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione

$$g(x) = \frac{x^2 + 1}{\ln(1 + x)}$$

nel punto $x = 1$.

Esercizi per casa

Esercizio 3. Studiare le seguenti funzioni:

$$f(x) = \ln(\ln x)$$

$$g(x) = \ln(x^2 - 2x)$$

$$h(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

determinandone campo di esistenza, comportamento agli estremi, monotonia, eventuali punti di massimo e minimo, convessità, e tracciarne un grafico qualitativo.