Esercizi

1. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione

$$f(x) = \ln(2x + 1)$$

nel punto $x = 2$.

2. Calcolare il coefficiente angolare m della retta tangente al grafico della funzione

$$g(x) = \frac{\ln(x+1)}{2x^2 + 3}$$

nel punto $x = 0$.

Derivabilità e Continuità

Derivabilità $\Rightarrow$ Continuità :

se f è derivabile in x_0, allora f è continua in x_0.

Infatti, per l'ipotesi di derivabilità $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.

Consideriamo l'uguaglianza:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \qquad \text{per } x \neq x_0.$$

Passando al limite, si ricava la continuità in x_0:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0).$$

Continuità $\not\Rightarrow$ Derivabilità :

1. $f(x) = |x|$ (punto angoloso) 2. $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$ (punto cuspidale)

Queste funzioni sono continue, ma non sono derivabili in $x = 0$.

Criterio di Monotonia

Criterio di monotonia:

se f è una funzione derivabile in (a, b), si ha:

$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Leftrightarrow \quad f$ è debolmente crescente in (a, b)

$f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Leftrightarrow \quad f$ è debolmente decrescente in (a, b)

Nota: per quanto riguarda la monotonia stretta si può dimostrare che:

$f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad f$ è strettamente crescente in (a, b)

$f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad f$ è strettamente decrescente in (a, b)

MA non valgono le implicazioni inverse! Basta considerare la funzione $f(x) = x^3$: è strettamente crescente in $\mathbb{R}$, ma $f'(0) = 0$.

Criterio di Monotonia

Esempi. Determinare gli intervalli in cui le seguenti funzioni risultano crescenti e quelli in cui risultano decrescenti:

- $f(x) = x^2$

  Si ha che: $f'(x) = 2x \geq 0 \iff x \geq 0$.

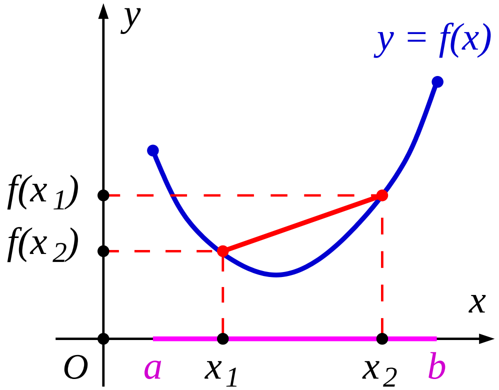
  Quindi, f è decrescente in $(-\infty, 0)$ ed è crescente in $(0, +\infty)$.

- $g(x) = (x^2 - 3)e^x$

  Si ha che: $g'(x) = (x^2 + 2x - 3)e^x \geq 0 \iff x \leq -3$ oppure $x \geq 1$.

  Quindi, g è decrescente in $(-3, 1)$ ed è crescente in $(-\infty, -3)$ e in $(1, +\infty)$.

Funzioni Concave e Convesse



Una funzione f è convessa in (a,b) se

$$f(\lambda\, x_1 + (1-\lambda)\, x_2) \leq \lambda\, f(x_1) + (1-\lambda)\, f(x_2)$$

per ogni $x_1, x_2 \in (a,b)$ e per ogni $\lambda \in [0,1]$. Cioè, presi comunque due punti sul grafico di f, il segmento che li congiunge sta *sopra* il grafico.

Una funzione f è concava in (a,b) se

$$f(\lambda\, x_1 + (1-\lambda)\, x_2) \geq \lambda\, f(x_1) + (1-\lambda)\, f(x_2)$$

per ogni $x_1, x_2 \in (a,b)$ e per ogni $\lambda \in [0,1]$. Cioè, presi comunque due punti sul grafico di f, il segmento che li congiunge sta *sotto* il grafico.

Criterio di Convessità

Criterio di convessità. Se f è una funzione derivabile due volte in (a,b), si ha:

$$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b) \qquad \Leftrightarrow \qquad f \text{ convessa in } (a,b)$$

$$f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a,b) \qquad \Leftrightarrow \qquad f \text{ concava in } (a,b)$$

Esempi. Determinare la convessità delle seguenti funzioni:

- $f(x) = x^2$

  Si ha che: $f''(x) = 2 \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi, f è convessa in $\mathbb{R}$.

- $g(x) = e^{-x^2}$

  Si ha che: $g''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1) \geq 0 \iff x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ oppure $x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

  Quindi, g è concava in $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ed è convessa in $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ e in $(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$.

Problemi di Massimo e Minimo

Punti di massimo e minimo assoluti. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in A$.

x_0 è un *punto di massimo assoluto* se $f(x_0) \geq f(x)$ per ogni $x \in A$.

x_0 è un *punto di minimo assoluto* se $f(x_0) \leq f(x)$ per ogni $x \in A$.

Teorema di Weierstrass. Sia f una funzione definita e continua su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Allora esistono il massimo e il minimo assoluti di f in $[a, b]$.

Nota. Osserviamo che le ipotesi sono tutte essenziali per la validità del teorema, esibendo dei *controesempi*:

1. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{per } x \neq 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \end{cases}$ non ha minimo in $[-1, 1]$.

   Infatti, la funzione non è *continua*.

2. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ non ha massimo in $(0, 1]$. Infatti, l'intervallo non è *chiuso*.

3. $f(x) = e^x$ non ha minimo in $(-\infty, 0]$. Infatti, l'intervallo non è *limitato*.

Problemi di Massimo e Minimo

Punti di massimo e minimo relativi. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in A$.
x_0 è un *punto di massimo relativo* se esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{per ogni } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

x_0 è un *punto di minimo relativo* se esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{per ogni } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Teorema dei punti critici (Fermat). Sia f una funzione definita su un intervallo $[a, b]$ e sia x_0 un punto di massimo o di minimo relativo. Se $x_0 \in (a, b)$ e se f è *derivabile* in x_0, allora $f'(x_0) = 0$.

Nota: i punti in cui si annulla la derivata prima (tra cui vanno ricercati gli eventuali punti di massimo o di minimo relativo interni), si dicono *stazionari* o *critici*.

Criterio della derivata seconda. Sia f una funzione derivabile due volte nell'intervallo (a, b) e sia x_0 un *punto critico*.

- Se $f''(x_0) > 0$, allora x_0 è un punto di minimo relativo.
- Se $f''(x_0) < 0$, allora x_0 è un punto di massimo relativo.

Esercizi

Esercizio 1. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 + 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

studiarne continuità e derivabilità in $x = 0$.

Esercizio 2. Studiare le seguenti funzioni:

(a) $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$

(b) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 1}$

determinandone campo di esistenza, comportamento agli estremi, monotonia, eventuali punti di massimo e minimo, convessità, e tracciarne un grafico qualitativo.