Funzioni Continue

Continuità in un punto: una funzione f si dice continua in un punto x_0 se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\,,$$

cioè,

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)\,.$$

Continuità in un intervallo: una funzione f è continua in un intervallo $[a,b]$ se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\ \ \forall\, x_0 \in (a,b), \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \text{ e } \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b).$$

Graficamente: una funzione definita su un intervallo è continua se è possibile disegnarne il grafico con un tratto *continuo*, senza staccare la penna dal foglio.

Funzioni Continue – Operazioni

Dalle proprietà delle operazioni sui limiti segue che la somma, il prodotto e il quoziente di funzioni continue sono funzioni continue.

Se f e g sono continue in x_0, si ha:

- $f+g$ è continua in x_0, cioè, $\lim_{x\to x_0}\Big[f(x)+g(x)\Big]=f(x_0)+g(x_0)$.
- $f\cdot g$ è continua in x_0, cioè, $\lim_{x\to x_0}\Big[f(x)g(x)\Big]=f(x_0)g(x_0)$.
- se g è diversa da zero vicino a x_0, $\dfrac{f}{g}$ è continua in x_0, cioè, $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$.

Funzione inversa: se f è continua e invertibile, allora anche la *funzione inversa* f^{-1} è continua.

Funzioni Continue – Esempi

Le seguenti funzioni sono continue nei rispettivi campi di esistenza:

1. la funzione valore assoluto $|x|$
2. le funzioni potenza ad esponente reale x^b
3. i polinomi $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$
4. le funzioni razionali (cioè, quozienti di due polinomi)
5. le funzioni esponenziali a^x e le loro inverse (le funzioni logaritmiche $\log_a x$)
6. le funzioni $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$
7. ...

Esempio

Calcolare $\lim_{x\to 2} \dfrac{3x^3+x^2+1}{x-1}$.

La funzione $f(x) = \frac{3x^3+x^2+1}{x-1}$ è una funzione razionale fratta, quindi è continua in tutti i punti dove è definita, cioè in $\mathbb{R} - \{1\}$. Pertanto

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x^3+x^2+1}{x-1} = \frac{3\cdot 2^3+2^2+1}{2-1} = 29\,.$$

Attenzione: NON usare la regola dei termini di grado massimo! La regola vale solo per il limite di una funzione razionale fratta per $x \to +\infty$ o per $x \to -\infty$!

Quanto vale invece $\lim_{x\to 1} \dfrac{3x^3+x^2+1}{x-1}$?

Limite di Funzione Composta

Siano f e g due funzioni per cui abbia senso $f \circ g$. Supponiamo che

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = L$$

e che f sia continua in L. Allora si ha che

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f\Big(\lim_{x \to x_0} g(x)\Big).$$

Esempi: (1) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \sin\left(\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}\right) = \sin 0 = 0$

(2) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{4x+1}{x}} = \sqrt{\lim_{x \to +\infty} \frac{4x+1}{x}} = \sqrt{4} = 2$

Continuità della Funzione Composta

Supponiamo che:

- g continua in x_0, cioè, $\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$
- f continua in $y_0 = g(x_0)$, cioè, $\lim_{y \to y_0} f(y) = f(y_0)$

Allora $f \circ g$ è continua in x_0, cioè,

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(g(x_0)).$$

Esempi: le funzioni $f_1(x) = \sqrt[3]{7 + e^x}$, $f_2(x) = \log_{10}(9 + e^{1-x})$ sono continue dove sono definite. Pertanto, ad esempio,

$$\lim_{x \to 0} \sqrt[3]{7 + e^x} = 2\,, \qquad \lim_{x \to 1} \log_{10}(9 + e^{1-x}) = 1$$

Esercizi sulle Funzioni Continue

Esercizio 1. Stabilire se le seguenti funzioni sono continue in $\mathbb{R}$:

- $$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{per } x \le 1 \\ |x| + 2 & \text{per } x > 1 \end{cases}$$

- $$g(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{per } x \ne 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

- $$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{per } x \ne 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Esercizio 2. Determinare per quali valori del parametro k la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 3x^3 + x + 2 - k & \text{per } x \leq 0 \\ \sqrt{x^4 + 1} & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

è continua in tutto il suo insieme di definizione.

Esercizio 3. Determinare per quali valori del parametro k la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^5 - 3k & \text{per } x < 1 \\ 2k\, e^{x-1} & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$$

è continua in tutto il suo insieme di definizione.

Esempi di Discontinuità

Esempio 1. $\lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases} \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = 0, \qquad f(0) = 1.$$

Esempio 2. $\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1, \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1.$$

Esempi di Discontinuità

Esempio 3. $\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \pm\infty$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty.$$

Esempio 4. non esiste $\lim_{x\to 0} f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Esercizio

Scrivere l'espressione esplicita di una funzione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che siano verificate contemporaneamente le seguenti proprietà:

- $f(0) = 0$,
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$,
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$.