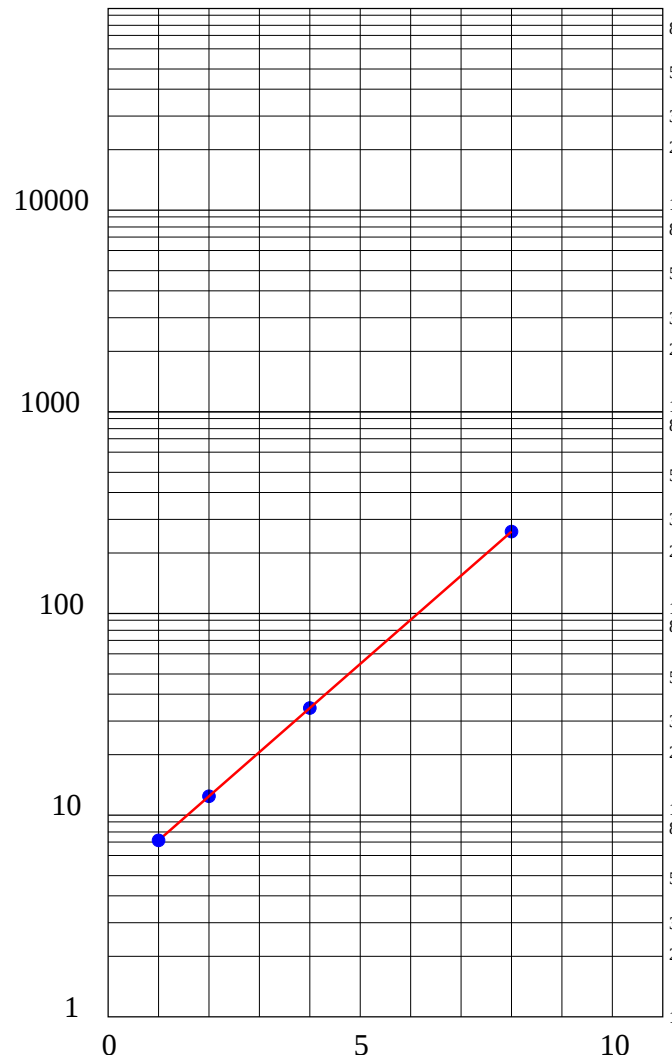


Carta Semilogaritmica – Esempio



Sono date le coordinate cartesiane di alcuni punti desunti da osservazioni sperimentali:

$$A = (1, 7.1) \quad B = (2, 12.1)$$

$$C = (4, 35) \quad D = (8, 288)$$

È ragionevole ritenere che questi punti appartengano al grafico di una funzione esponenziale?

Risposta: rappresentando questi punti su una carta semilogaritmica, osserviamo che risultano praticamente allineati.

Quindi, questi punti appartengono al grafico di una funzione esponenziale.

Esercizi

Esercizio 4. (a) Su carta semilogaritmica è assegnata la retta di equazione $Y = \log_{10} 3 + (\log_{10} 4)X$, dove $X = x$ e $Y = \log_{10} y$. Trovare il corrispondente legame funzionale tra x e y .

(b) Si risponda alla stessa domanda nel caso che sia assegnata su carta logaritmica la retta di equazione $Y = \log_{10} 5 + \frac{3}{2}X$, dove $X = \log_{10} x$ e $Y = \log_{10} y$.

Soluzione:

$$(a) \quad y = 3 \cdot 4^x \qquad (b) \quad y = 5x^{\frac{3}{2}}$$

Esercizi

Esercizio 5. In un grafico con scala semilogaritmica (*scala normale sull'asse delle ascisse e scala logaritmica sull'asse delle ordinate*)

- (a) è rappresentata la retta di equazione $Y = -\log_{10} 5 + (\log_{10} 2)X$.
Trovare il legame funzionale tra x e y , dove $X = x$ e $Y = \log_{10} y$;
- (b) trovare il coefficiente angolare della retta che rappresenta su tale scala la funzione $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$. Dire se tale coefficiente angolare è positivo o negativo.

Soluzione:

- (a) $y = \frac{2^x}{5}$ (b) Il coefficiente angolare è $\log_{10} \frac{3}{5} < 0$.

Esercizi

Esercizio 6. (a) Scegliendo le coordinate logaritmiche opportune (semilogaritmiche o doppiamente logaritmiche) scrivere la retta corrispondente alla funzione $y = \sqrt{2x^5}$.

(b) In queste coordinate quale curva corrisponde alla retta $Y = -2X + 5$?

Soluzione: (a) Le coordinate opportune sono quelle doppiamente logaritmiche. La retta è $Y = \frac{1}{2} \log_{10} 2 + \frac{5}{2}X$.

(b) $y = \frac{10^5}{x^2}$

Esercizio 7. (a) Scegliendo le coordinate logaritmiche opportune (semilogaritmiche o doppiamente logaritmiche) scrivere la retta corrispondente alla funzione $y = \frac{4}{10^{5x}}$.

(b) In queste coordinate quale curva corrisponde alla retta $Y = 3 - 7X$?

Soluzione: (a) Le coordinate opportune sono quelle semilogaritmiche. La retta è $Y = \log_{10} 4 - 5X$.

(b) $y = \frac{10^3}{10^{7x}}$

Successioni

Vi sono fenomeni naturali e situazioni concrete che presentano sviluppi significativi in tempi **discreti**.

Vale a dire è naturale che i controlli per quei dati fenomeni o per quelle date situazioni avvengano ad intervalli di tempo prefissati (di minuti, ore, giorni, anni, ...).

ESEMPI:

1. aumento dello stipendio di un lavoratore dipendente per effetto degli scatti di anzianità;
2. crescita di un capitale investito ad un tasso fisso di interesse annuo;
3. crescita di una popolazione di cellule;
4. decadimento di una sostanza radioattiva.

Successioni: Progressioni Aritmetiche

Esempio 1: aumento di uno stipendio per effetto degli scatti di anzianità (dalla parte del padrone)

- $S(0) = S$ stipendio all'istante iniziale, al momento dell'assunzione
- scatto annuale di anzianità pari all'1.5% dello stipendio iniziale
- dopo un anno lo stipendio sarà $S(1) = S + \frac{1.5}{100} S$
- dopo 2 anni lo stipendio sarà $S(2) = S(1) + \frac{1.5}{100} S = S + 2 \frac{1.5}{100} S$
- dopo n anni lo stipendio sarà

$$S(n) = S + n \frac{1.5}{100} S = S + nd \quad \left(\text{dove } d = \frac{1.5}{100} S \right)$$

Si dice **successione** una corrispondenza che ad ogni intero n associa un valore $S(n)$. In questo caso

$$S(n) = S + nd \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{progressione aritmetica di ragione } d$$

Successioni: Progressioni Geometriche

Esempio 2: aumento di uno stipendio per effetto degli scatti di anzianità (dalla parte del dipendente)

- $C(0) = C$ stipendio all'istante iniziale, al momento dell'assunzione
- scatto annuale di anzianità pari all'1.5% dello stipendio dell'anno precedente
- dopo un anno $C(1) = C + \frac{1.5}{100} C = C \left(1 + \frac{1.5}{100}\right)$
- dopo 2 anni

$$C(2) = C(1) + \frac{1.5}{100} C(1) = C(1) \left(1 + \frac{1.5}{100}\right) = C \left(1 + \frac{1.5}{100}\right)^2$$

- posto $q = 1 + \frac{1.5}{100}$, dopo n anni lo stipendio sarà

$$C(n) = C q^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{progressione geometrica di ragione } q$$

Un Modello di Crescita Cellulare

In particolari condizioni, dopo un certo intervallo temporale, una cellula si suddivide in due nuove cellule (*dicotomia della cellula*). Queste a loro volta raddoppiano dopo un intervallo di tempo uguale al precedente.

Assumendo come unità di misura dei tempi il cosiddetto *tempo di raddoppio*, il processo può essere schematizzato dalla progressione geometrica:

$$K(0) = K_0, \quad K(n) = 2 \cdot K(n-1) = 2^n \cdot K_0$$

dove $K(n)$ è il numero delle cellule dopo n tempi di raddoppio.

Esercizio. Il tempo necessario per una suddivisione di una cellula è di 5 giorni. Calcolare il numero di cellule dopo 60 giorni partendo da un'unica cellula iniziale.

Soluzione: 60 giorni corrispondono a 12 tempi di raddoppio. Quindi, il numero delle cellule è

$$K(12) = 2^{12} = 4096 \simeq 4000$$

Nota: può essere utile ricordare che $2^{10} = 1024 \simeq 1000$.

Un Modello di Decadimento Radioattivo

Le sostanze radioattive decadono progressivamente. La velocità di decadimento si misura mediante il cosiddetto *semiperiodo* o *tempo di dimezzamento*, che rappresenta il tempo necessario perché il numero degli atomi della sostanza radioattiva risulti dimezzato.

Assumendo come unità di misura dei tempi il *tempo di dimezzamento*, il processo può essere schematizzato dalla progressione geometrica:

$$K(n) = \frac{1}{2} \cdot K(n-1) = \frac{1}{2^n} \cdot K(0)$$

dove $K(n)$ è la quantità di sostanza radioattiva dopo n tempi di dimezzamento a partire da una quantità iniziale $K(0)$.

Esercizio. Dopo quanti tempi di dimezzamento una sostanza radioattiva si è ridotta a meno di $1/4$ (cioè a meno del 25%) della quantità iniziale?

Soluzione: $K(n) = \frac{1}{2^n} K(0) \leq \frac{1}{4} K(0) \Rightarrow n = 2$

Esercizi

Esercizio 1. Una popolazione cellulare è formata all'istante $t = 0$ da 10^4 cellule aventi tempo di raddoppio $T = 100$ giorni. Dopo quanti giorni la popolazione è pari a 4.000.000 di cellule? Qual è il tempo di raddoppio di una seconda popolazione cellulare che passa da 10^4 a 8.000.000 di cellule in 40 giorni?

Nota: $\log_2 10 \simeq 3.3$

Soluzione:

1. Dopo n tempi di raddoppio ci sono $2^n \cdot 10^4$ cellule; questo numero deve essere uguale a $4 \cdot 10^6$, quindi n soddisfa l'equazione:

$$2^n \cdot 10^4 = 4 \cdot 10^6 \Leftrightarrow 2^n = 4 \cdot 10^2 \Leftrightarrow n = \log_2(4 \cdot 10^2),$$

cioè, $n = 2 + 2 \log_2 10 \simeq 8,6$. Quindi, dopo $100 \cdot 8,6 = 860$ giorni si hanno 4.000.000 di cellule.

2. Si ha $2^n \cdot 10^4 = 8 \cdot 10^6$, quindi $n = 3 + 2 \log_2 10$. Indicando con x il tempo di raddoppio, si ha $40 = x \cdot (3 + 2 \log_2 10)$, da cui si ricava x .

Esercizi

Esercizio 2. In una coltura batterica sono presenti inizialmente N_0 batteri. Il loro numero raddoppia ogni 3 ore. Quanti batteri ci saranno nella coltura dopo 24 ore? Quando il numero di batteri nella coltura sarà pari al 25% della quantità finale?

Soluzione:

1. Si osservi che 24 ore corrispondono a 8 tempi di raddoppio. Pertanto il numero di batteri dopo 24 ore è $2^8 \cdot N_0 = 256 \cdot N_0$.
2. Deve essere $2^n \cdot N_0 = \frac{25}{100} \cdot 256 \cdot N_0$, da cui $n = 6$. Pertanto, il numero di batteri sarà pari al 25% della quantità finale dopo 6 tempi di raddoppio, cioè dopo 18 ore.

Esercizi

Esercizio 3. Un tumore viene diagnosticato quando il suo volume è di circa 10 cm^3 . Schematizzando le cellule tumorali come cubetti di lato $10 \mu\text{m}$ e supponendo che il loro tempo di raddoppio sia di circa 100 giorni, stimare il tempo trascorso dal momento della formazione della prima cellula tumorale.

Nota: $1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$ $\log_2 10 \simeq 3.3$

Soluzione:

Si osservi che $10 \mu\text{m} = 10^{-3} \text{ cm}$. Il volume di una cellula è pari a $10^3 \mu\text{m}^3 = 10^{-9} \text{ cm}^3$. Pertanto un volume di 10 cm^3 contiene un numero di cellule pari a $\frac{10}{10^{-9}} = 10^{10}$.

Deve essere $2^n = 10^{10}$, da cui $n = 10 \log_2 10$. Quindi, il tempo trascorso dalla formazione della prima cellula tumorale fino al momento in cui il tumore viene diagnosticato è dato da $100 \cdot 10 \log_2 10 \simeq 3300$ giorni.