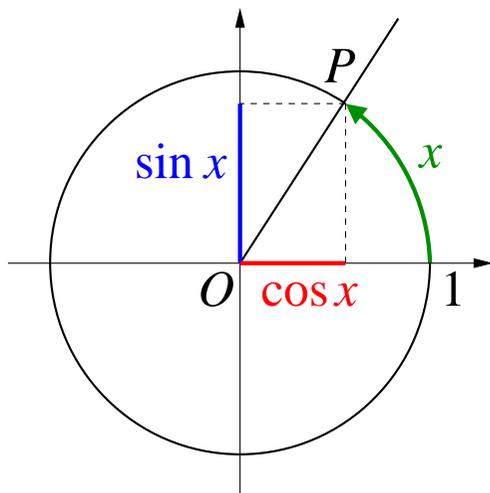


Funzioni Seno e Coseno

Circonferenza di raggio 1



Dato $x \in \mathbb{R}$ si costruisce il punto P partendo da $(1,0)$ e percorrendo un arco di lunghezza $|x|$

- in senso *antiorario* se $x > 0$
- in senso *orario* se $x < 0$

Per definizione $P = (\cos x, \sin x)$.

Relazione fondamentale:

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Proprietà di $\sin x$:

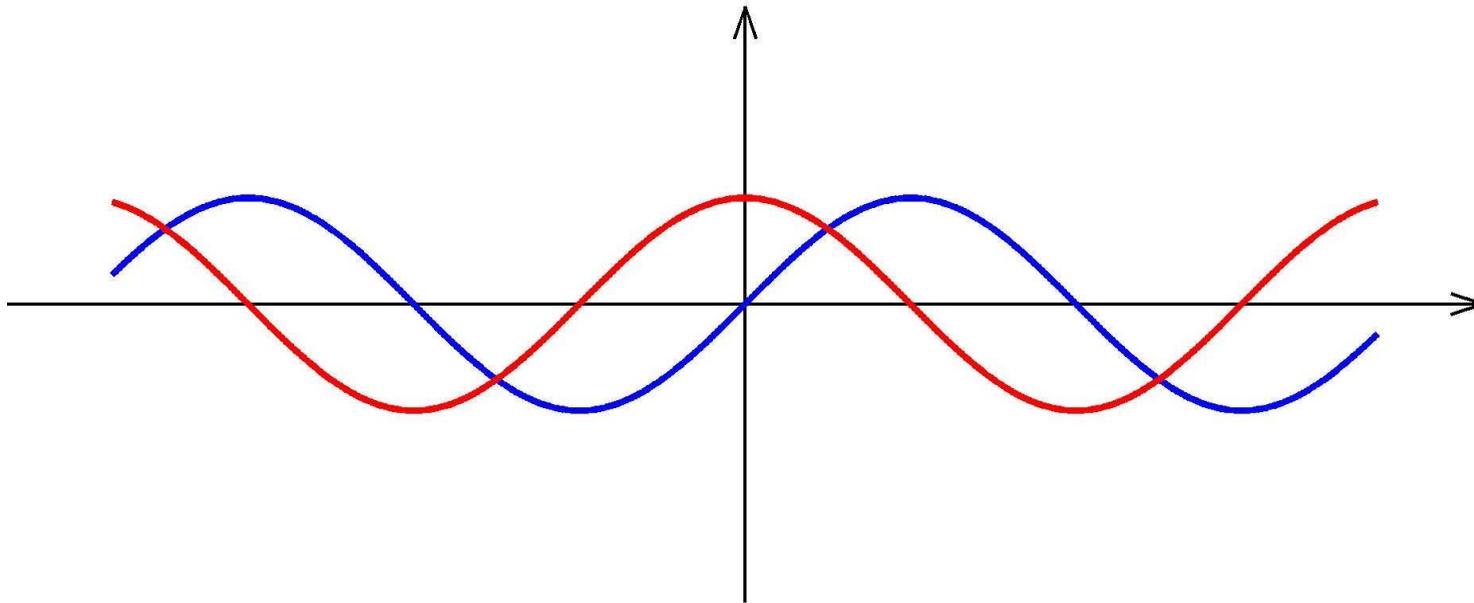
- periodica:
 $\sin(x + 2\pi) = \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $-1 \leq \sin x \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\sin x > 0$ per $x \in (0, \pi)$
 $\sin x < 0$ per $x \in (\pi, 2\pi)$
- è crescente in $[0, \frac{\pi}{2}]$ e in $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$
- è decrescente in $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$
- dispari: $\sin(-x) = -\sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- alcuni valori notevoli:
 $\sin 0 = \sin \pi = \sin 2\pi = 0$
 $\sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad \sin \frac{3\pi}{2} = -1$

Funzioni Seno e Coseno

Dalle proprietà precedenti si ottiene il seguente grafico per $y = \sin x$.

Il grafico $y = \cos x$ si ottiene per traslazione poiché si ha

$$\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$



Funzione Tangente

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{per ogni } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

È una funzione periodica di periodo π e dispari.

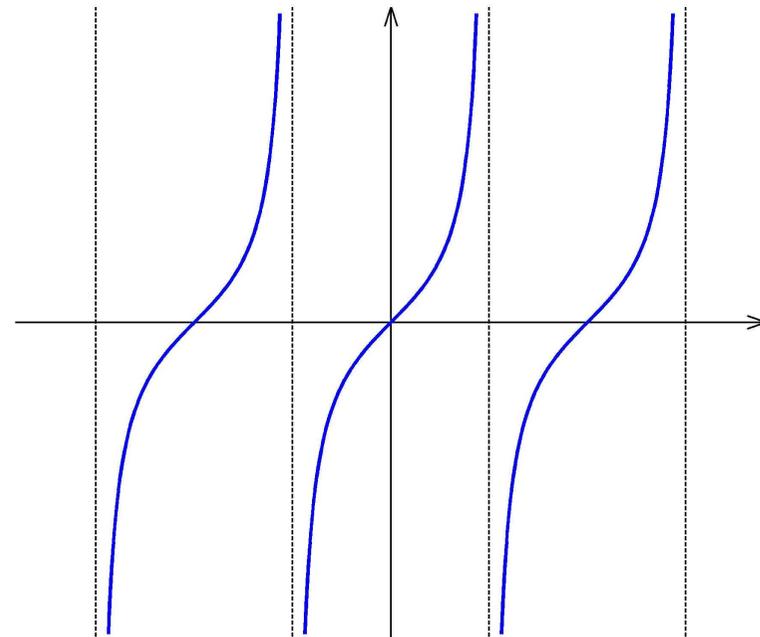
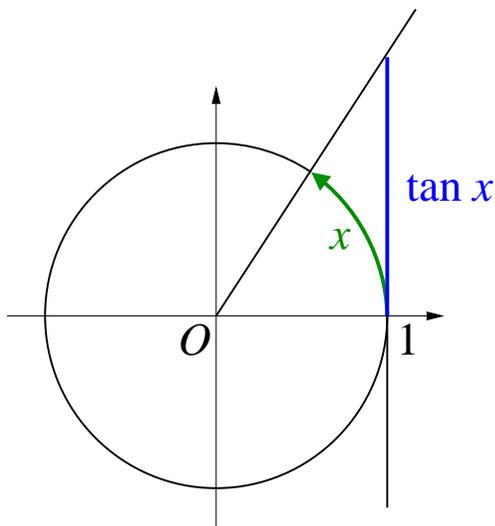


grafico di $f(x) = \tan x$

Esercizi

1. Date le funzioni $f(x) = e^x$ e $g(x) = \ln(x - 2)$,

(a) dire quanto vale $f \circ g$ e qual è il suo insieme di definizione;

(b) dire quanto vale $g \circ f$ e qual è il suo insieme di definizione.

2. Date le funzioni $f(x) = -x^3$ e $g(x) = \ln x$,

(a) dire quanto vale $f \circ g$ e qual è il suo insieme di definizione;

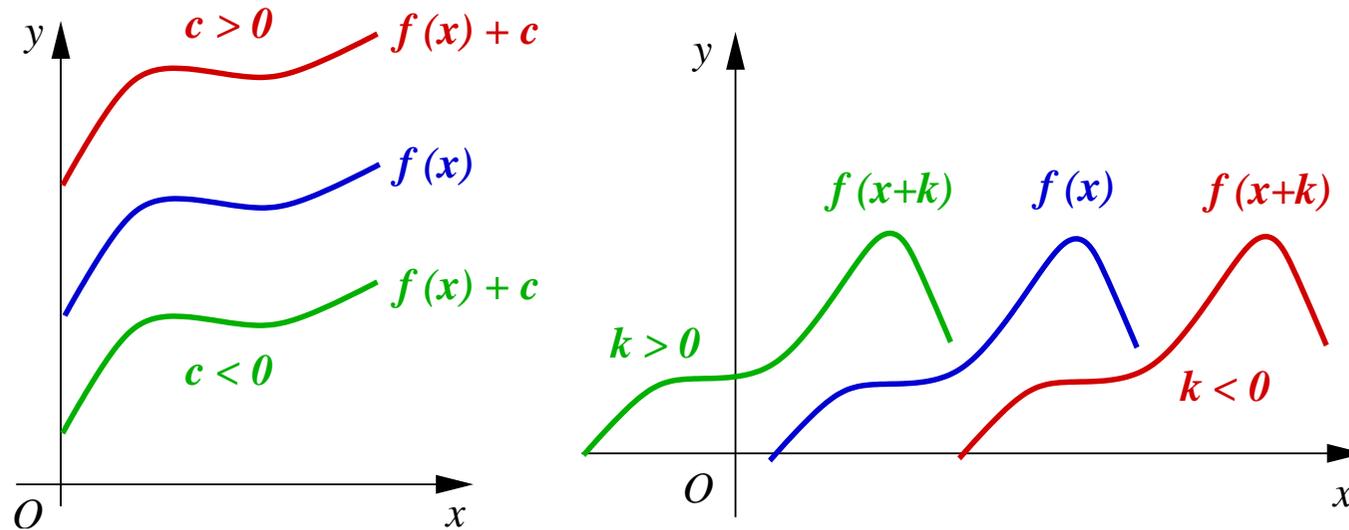
(b) dire quanto vale $g \circ f$ e qual è il suo insieme di definizione.

Esercizi

3. Determinare il campo di esistenza delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \frac{1}{1 + \cos x}, \quad g(x) = \tan(\log_{10} x).$$

Traslazioni



Traslazioni verticali:

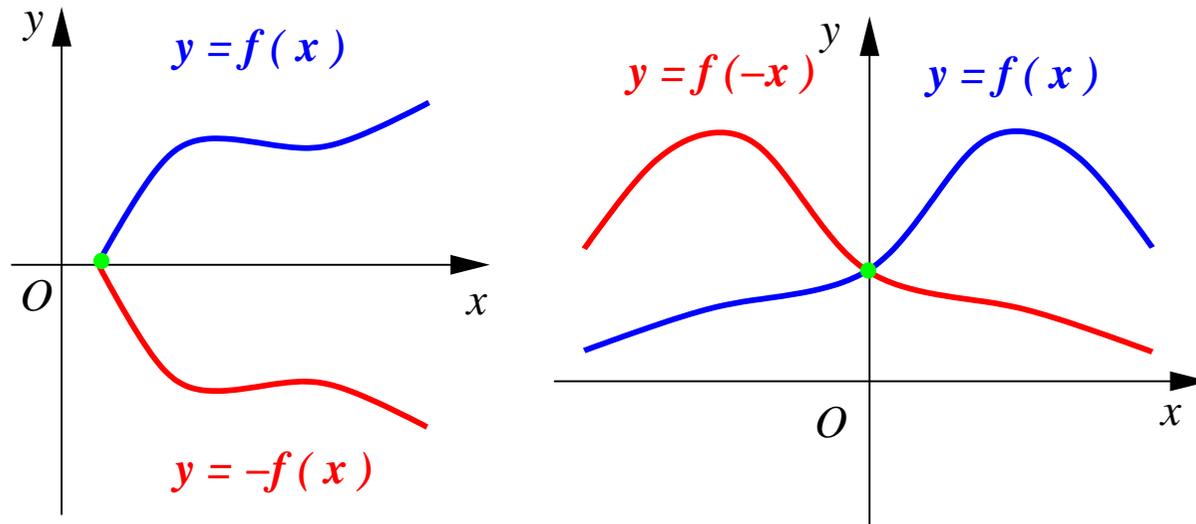
$y = f(x) + c$ traslazione verticale verso l'alto se $c > 0$, verso il basso se $c < 0$

Traslazioni orizzontali:

$y = f(x + k)$ traslazione orizzontale verso sinistra se $k > 0$, verso destra se $k < 0$

Esercizio: disegnare il grafico delle funzioni $y = 1 + \log x$, $y = |x| - 3$, $y = e^x + 1$,
 $y = x^3 - 8$, $y = \log(x - 1)$, $y = |x + 2|$, $y = (x - 2)^3$, $y = \frac{1}{x - 1}$, $y = e^{x+3}$

Riflessioni



Riflessione rispetto all'asse x :

$y = -f(x)$ i punti di intersezione con l'asse x restano invariati

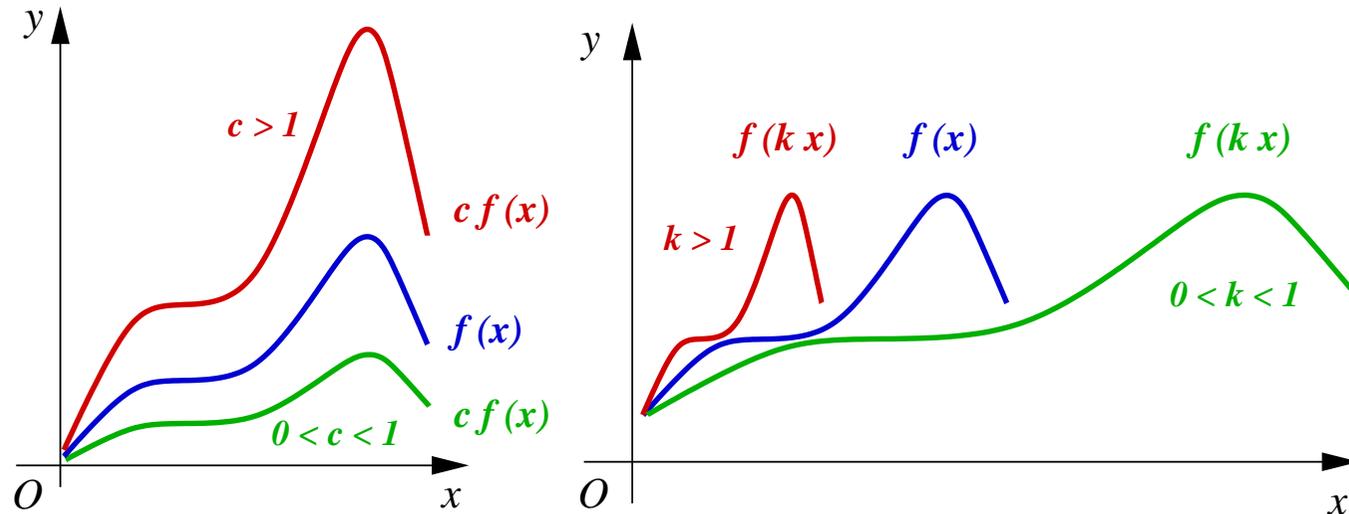
Esercizio: disegnare il grafico di $y = -|x|$, $y = -\frac{1}{x}$, $y = \log \frac{1}{x} = -\log x$

Riflessione rispetto all'asse y :

$y = f(-x)$ i punti di intersezione con l'asse y restano invariati

Esercizio: disegnare il grafico di $y = e^{-x}$, $y = \sqrt{-x}$, $y = (-x + 1)^3$

Dilatazioni



Cambio di scala sull'asse y :

$y = c \cdot f(x)$ compressione per $0 < c < 1$, dilatazione per $c > 1$

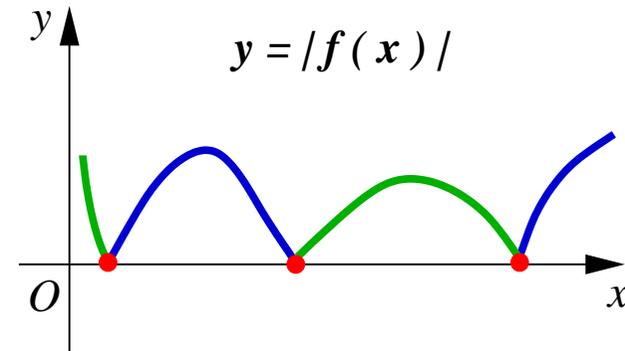
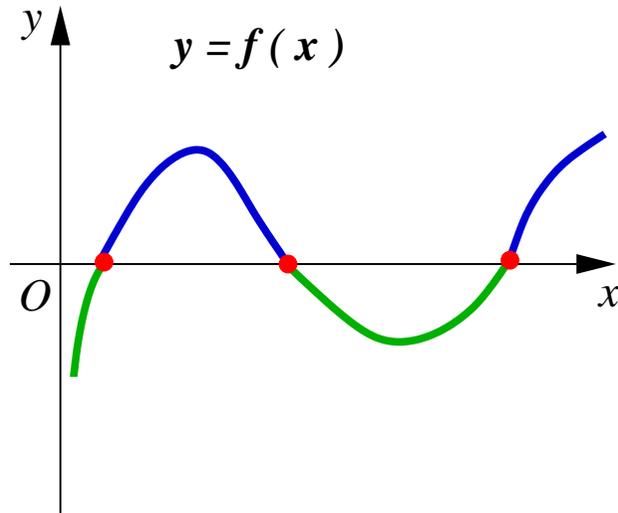
Esercizio: disegnare il grafico di $y = \frac{1}{2}x$, $y = \log x^3 = 3 \log x$, $y = 2 \sin x$

Cambio di scala sull'asse x :

$y = f(k \cdot x)$ dilatazione per $0 < k < 1$, compressione per $k > 1$

Esercizio: disegnare il grafico di $y = \frac{1}{3}x$, $y = \sin(2x)$, $y = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

Valore Assoluto



$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0, \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases} \quad (\text{riflessione})$$

Nota: gli zeri della funzione restano invariati

Esercizio: disegnare il grafico di $y = |2x + 1|$, $y = |x^3|$, $y = |\log x|$