Funzione Composta

Date due funzioni $g : A \to B$ e $f : B \to C$ si può definire la funzione composta:

$$f \circ g : A \to C \qquad x \mapsto g(x) \mapsto f(g(x))$$

notazione funzionale $\qquad (f \circ g)(x) = f(g(x))$

La composizione ha senso se il valore $g(x)$ appartiene al dominio della funzione f.

Il campo di esistenza della funzione composta è costituito dai soli valori di x per i quali la composizione funzionale ha senso.

Esempi:

- $f(x) = \sqrt{x}, \; g(x) = x^2 - 4 \;\Rightarrow\; (f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ con $D = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
- $f(x) = \dfrac{1}{x}, \; g(x) = x - 7 \;\Rightarrow\; (f \circ g)(x) = \dfrac{1}{x - 7}$ con $D = \{x \in \mathbb{R} : \; x \neq 7\}$
- $f(x) = \dfrac{1}{x}, \; g(x) = x^2 + 1 \;\Rightarrow\; (f \circ g)(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ con $D = \mathbb{R}$

Funzione Composta

Esercizio 1. Date le funzioni $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = 2x + 1$,

- dire quanto vale $f \circ g$ e qual è il suo insieme di definizione;
- dire quanto vale $g \circ f$ e qual è il suo insieme di definizione.

Esercizio 2. Date le funzioni $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 1$,

- dire quanto vale $f \circ g$ e qual è il suo insieme di definizione;
- dire quanto vale $g \circ f$ e qual è il suo insieme di definizione.

Funzione Inversa

Una funzione biunivoca è invertibile, cioè:

se $f : D \to C$ è biunivoca, possiamo definire la funzione inversa f^{-1}

$$f^{-1} : C \to D, \qquad x = f^{-1}(y)$$

per ogni $y \in C$, x è l'unico punto di D tale che $f(x) = y$

Un tale x esiste ed è unico perché la funzione f è biunivoca.

Esempi

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x + 1$

  $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y - 1)$

- $f : (-\infty, 0] \to [0, +\infty), \quad f(x) = x^2$

  $f^{-1} : [0, +\infty) \to (-\infty, 0], \quad f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$

Proprietà della Funzione Inversa

Sia $f : D \to C$ invertibile e sia $f^{-1} : C \to D$ la sua funzione inversa.

Consideriamo la funzione composta $f^{-1} \circ f$:

$$f^{-1} \circ f : \; x \in D \;\mapsto\; f(x) \in C \;\mapsto\; f^{-1}\big(f(x)\big) = x \in D$$

In altre parole, $f^{-1} \circ f : D \to D$, $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ è la *funzione identità* su D.

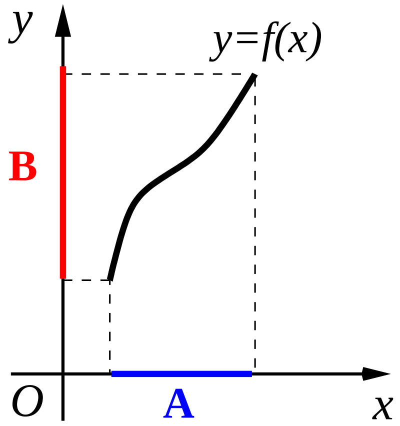
Analoga proprietà vale per $f \circ f^{-1}$:

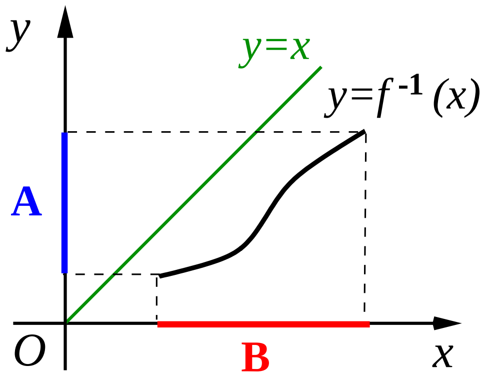
$$f \circ f^{-1} : \; y \in C \;\mapsto\; f^{-1}(y) \in D \;\mapsto\; f\big(f^{-1}(y)\big) = y \in C$$

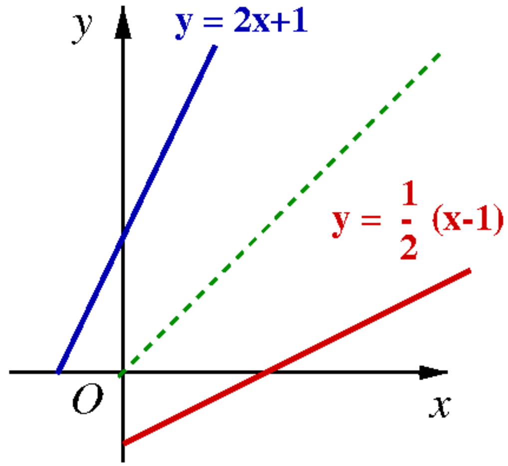
In altre parole, $f \circ f^{-1} : C \to C$, $(f \circ f^{-1})(y) = y$ è la *funzione identità* su C.

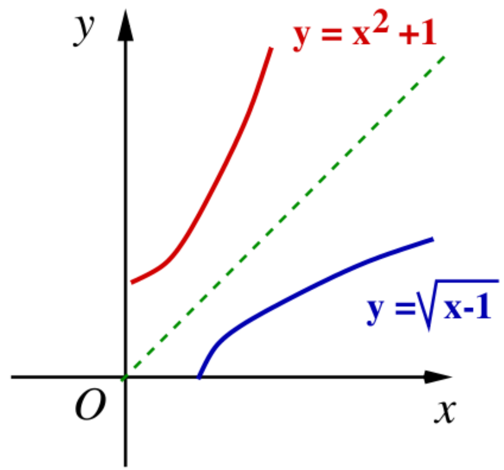
Grafico della Funzione Inversa

Il grafico di f^{-1} si ottiene per simmetria rispetto alla retta $y = x$.









Ancora sulla Funzione Inversa

Attenzione: non confondere la funzione inversa f^{-1} con la funzione reciproco $\dfrac{1}{f}$!!!

Esempio 1. Consideriamo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x$.

La funzione inversa è $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \dfrac{y}{3}$.

La funzione reciproco è $g : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{3x}$.

Esempio 2. Consideriamo $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$.

La funzione inversa è $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

La funzione reciproco è $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}_+$, $g(x) = \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{x^2}$.

Criterio di Invertibilità

Le funzioni strettamente monotone sono iniettive.

Criterio di Invertibilità:

se f è strettamente monotona e surgettiva, allora f è invertibile.

Se $f : D \to C$ è invertibile, allora

$$f \text{ crescente} \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1} \text{ crescente}$$

$$f \text{ decrescente} \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1} \text{ decrescente}$$

Esercizi sulle Funzioni Inverse

Esercizio 1. Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita: $f(x) = -x + 3$, dire se è invertibile e trovare la formula dell'inversa.

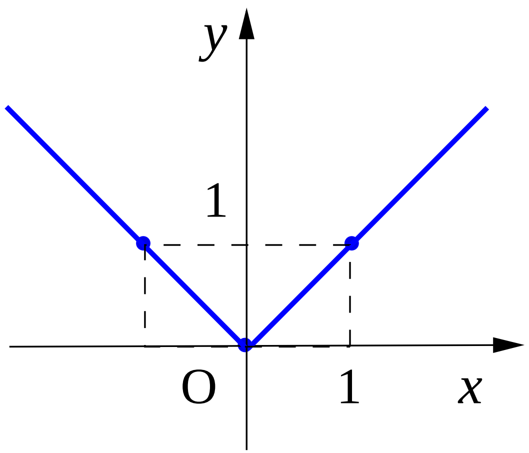
Soluzione: la funzione è biunivoca e l'inversa è $f^{-1}(y) = -y + 3$.

Esercizio 2. Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita: $f(x) = x^2 + 2x + 1$, dire se è invertibile e trovare la formula dell'inversa.

Soluzione: la funzione non è invertibile in quanto non è né iniettiva, né surgettiva. Per renderla surgettiva basta pensarla a valori in $\mathbb{R}_+$ e per renderla iniettiva basta, per esempio, restringerla a $[-1, +\infty)$. Dunque, la funzione $f : [-1, +\infty) \to \mathbb{R}_+$ definita da $f(x) = x^2 + 2x + 1$ è invertibile e la sua inversa è

$$f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to [-1, +\infty), \quad f^{-1}(y) = \sqrt{y} - 1.$$

Funzione Valore Assoluto



$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$$

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{per } x \geq 0 \\ -x & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

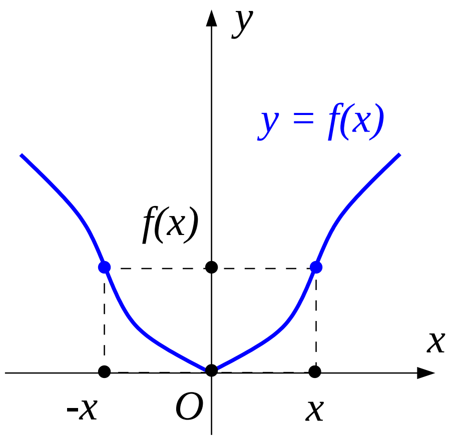
PROPRIETÀ:

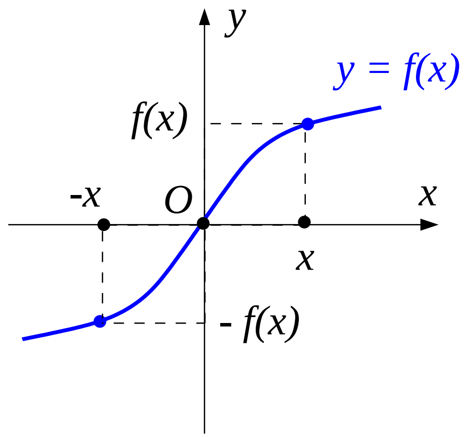
- $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$
- $|x_1 \cdot x_2| = |x_1| \cdot |x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
- $\left|\dfrac{x_1}{x_2}\right| = \dfrac{|x_1|}{|x_2|} \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_2 \neq 0$
- $\sqrt{x^2} = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- *disuguaglianza triangolare:*
  $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
- se $\delta > 0$, $|x| \leq \delta \Leftrightarrow -\delta \leq x \leq \delta$
  $|x - x_0| \leq \delta \Leftrightarrow x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$

Funzioni Pari e Dispari

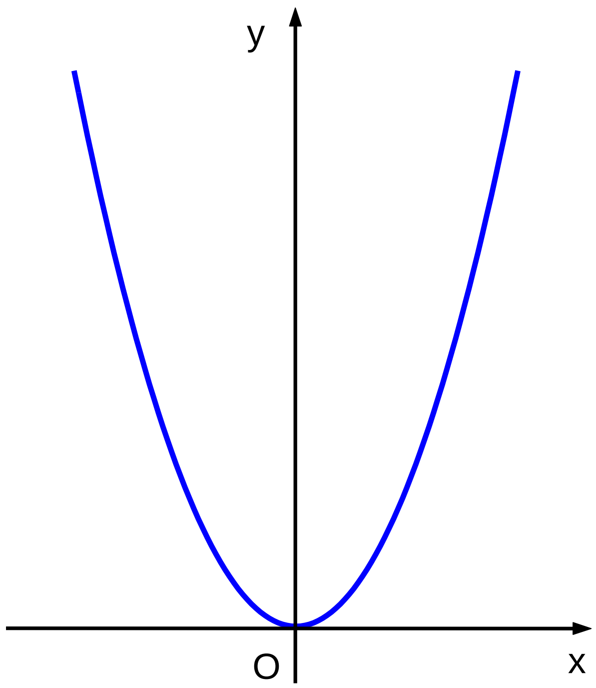
Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice

- PARI: se $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
  In questo caso il grafico della funzione è simmetrico rispetto all'asse y
- DISPARI: se $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
  In questo caso il grafico della funzione è simmetrico rispetto all'origine O
- ESEMPI: $f(x) = x^2$, $f(x) = x^{2n}$, $f(x) = |x|$ funzioni pari
  $f(x) = x$, $f(x) = x^{2n+1}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ funzioni dispari



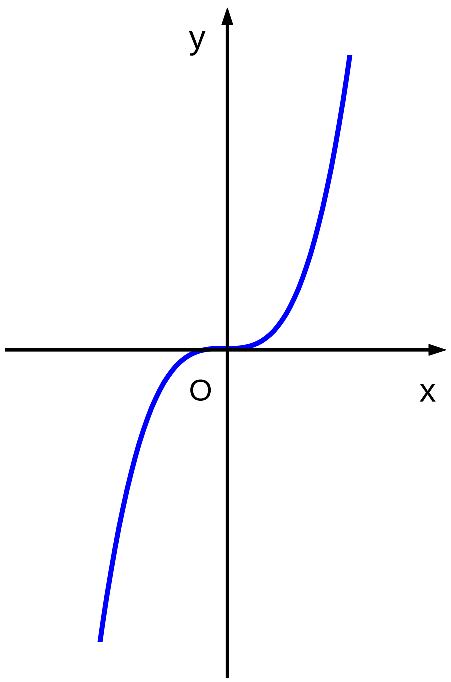


Potenze con Esponente Intero Positivo



$$y = f(x) = x^2$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ funzione pari



$$y = g(x) = x^3$$

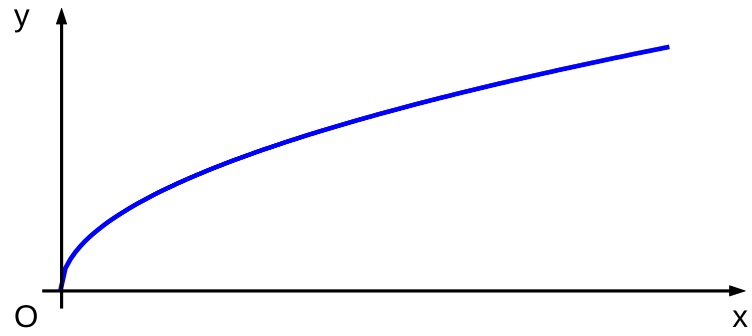
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione dispari

Il grafico di x^n è qualitativamente simile a quello di x^2 se n è *pari* o a quello di x^3 se n è *dispari*.

Radici

Consideriamo il problema dell'invertibilità della funzione potenza $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

- Se $n = 1$, la funzione $f(x) = x$ è l'*identità*, con inversa uguale a se stessa.
- Se $n = 2$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ NON è invertibile, ma lo è da $\mathbb{R}_+$ in $\mathbb{R}_+$. Chiamiamo *radice quadrata* la sua inversa $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

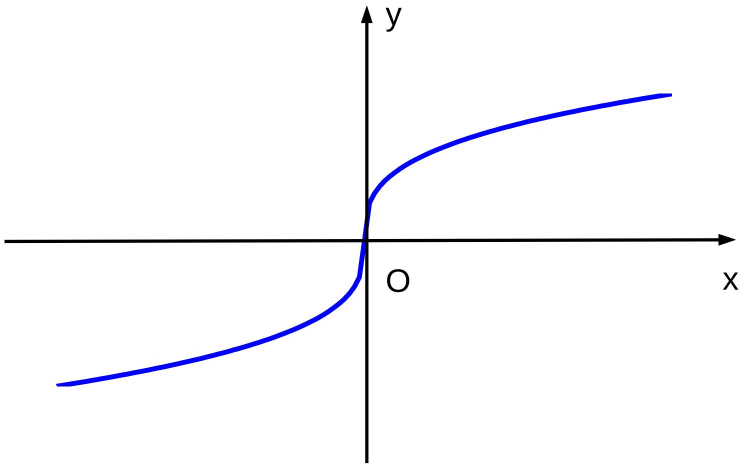


$y = \sqrt{x}$

In generale, se n è *pari*, la funzione $f(x) = x^n$ è invertibile da $\mathbb{R}_+$ in $\mathbb{R}_+$.
Chiamiamo l'inversa *radice n-sima* $\sqrt[n]{x}$ definita da $\mathbb{R}_+$ in $\mathbb{R}_+$.

Radici

- Se $n = 3$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ è *invertibile*.
  Chiamiamo *radice cubica* la sua inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.



$y = \sqrt[3]{x}$

In generale, se n è *dispari*, la funzione $f(x) = x^n$ è invertibile da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.
Chiamiamo *radice n-sima* $\sqrt[n]{x}$ definita da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

Funzioni Potenza

POTENZE AD ESPONENTE INTERO:

- se $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = x^n$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$;
- se l'esponente è un intero negativo,

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad \text{definita per ogni } x \neq 0.$$

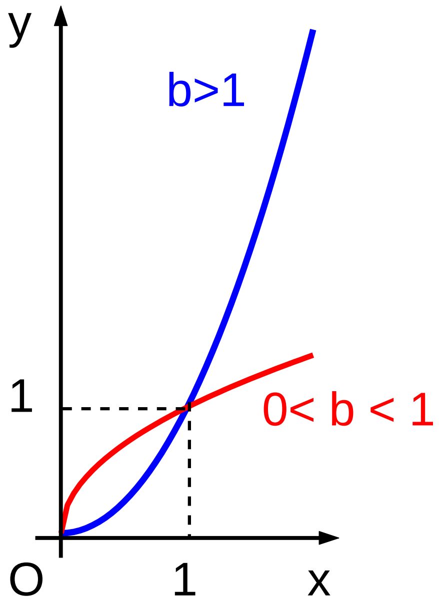
POTENZE AD ESPONENTE RAZIONALE: per $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N} - \{0\}$

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} \qquad \text{definita per ogni } x > 0.$$

POTENZE AD ESPONENTE REALE: per *estensione* si può definire la *potenza ad esponente reale*: $b \in \mathbb{R}$

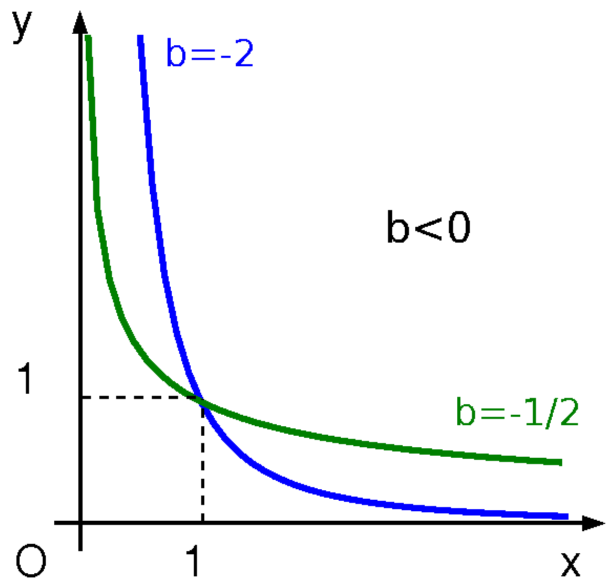
$$f(x) = x^b \qquad \text{definita per ogni } x > 0 \qquad \text{(resta indefinito } 0^0 \text{ !!!)}$$

Grafico di $f(x) = x^b$ con $b \in \mathbb{R}$



$$y = f(x) = x^b \quad \text{per } b > 0$$

$$f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$$



$$y = f(x) = x^b \quad \text{per } b < 0$$

$$f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$$

Ancora sulle Potenze

POLINOMI: con operazioni di somma e prodotto si costruiscono i *polinomi*, cioè le funzioni del tipo:

$$x \mapsto P_n(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \cdots + a_{n-1}\,x^{n-1} + a_n\,x^n.$$

P_n è detto polinomio di grado n.

FUNZIONI RAZIONALI: facendo il quoziente di due polinomi P e Q si ottengono le *funzioni razionali*, del tipo:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{definita su } \{x \in \mathbb{R} : \ Q(x) \neq 0\}.$$

Come caso particolare ritroviamo le funzioni potenza con esponente intero:

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad \text{definita su } \mathbb{R} - \{0\}.$$