Funzioni Biunivoche

Una funzione $f : D \to C$ è biunivoca (o biiettiva) se

ogni $y \in C$ è *immagine* di *uno ed un solo* elemento $x \in D$.

Esempi:

1. $D = C = \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ è biunivoca: $y \in \mathbb{R}$ è immagine di $x = \frac{1}{2}(y - 1)$.
2. $D = C = \mathbb{R}_+$, $f(x) = \sqrt{x}$ è biunivoca: $y \in \mathbb{R}_+$ è immagine di $x = y^2$.
3. $D = \mathbb{R}_-$, $C = \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$ è biunivoca: $y \in \mathbb{R}_+$ è immagine di $x = -\sqrt{y}$.
4. $D = \mathbb{R}_+$, $C = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ non è biunivoca, perché non è suriettiva: $y < 0$ non è immagine di alcun x.
5. $D = \mathbb{R}$, $C = \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$ non è biunivoca, perché non è iniettiva: $y = 4$ è immagine di $x = \pm 2$.

Operazioni sulle Funzioni

Date due funzioni f e g a valori reali, sull'intersezione dei due domini si possono definire:

- *funzione somma:* $s(x) = f(x) + g(x)$
- *funzione differenza:* $d(x) = f(x) - g(x)$
- *funzione prodotto:* $p(x) = f(x) \cdot g(x)$
- *funzione quoziente:* $q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ per x tale che $g(x) \neq 0$

Esempi:

1. *somma:* $f(x) = x, \quad g(x) = 5 \;\Rightarrow\; (f+g)(x) = x + 5$
2. *prodotto:* $f(x) = x, \quad g(x) = x + 5 \;\Rightarrow\; (f \cdot g)(x) = x(x+5) = x^2 + 5x$
3. *quoziente:* $f(x) = x + 3, \quad g(x) = x^2 - 1 \;\Rightarrow\; \dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{x+3}{x^2-1}$ per $x \neq \pm 1$
4. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x - 5 \;\Rightarrow\; \dfrac{f-g}{h}(x) = \dfrac{\sqrt{x} - x^2}{x-5}$ Qual è il dominio?

Campo di Esistenza

Il campo di esistenza di una funzione f è il dominio più grande su cui ha significato f.

Esercizio 1. Determinare il campo di esistenza della funzione $f(x) = 9 + 2x$.

Soluzione: $\mathbb{R}$

Esercizio 2. Determinare il campo di esistenza della funzione $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{-x}$.

Soluzione: affinché le due radici abbiano significato, i radicandi devono essere entrambi non negativi: $x - 2 \geq 0$ e $-x \geq 0$, cioè $x \geq 2$ e $x \leq 0$.
Segue che la funzione non è definita per alcun valore di x.

Campo di Esistenza

Esercizio 3. Determinare il campo di esistenza della funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x^2-4}$.

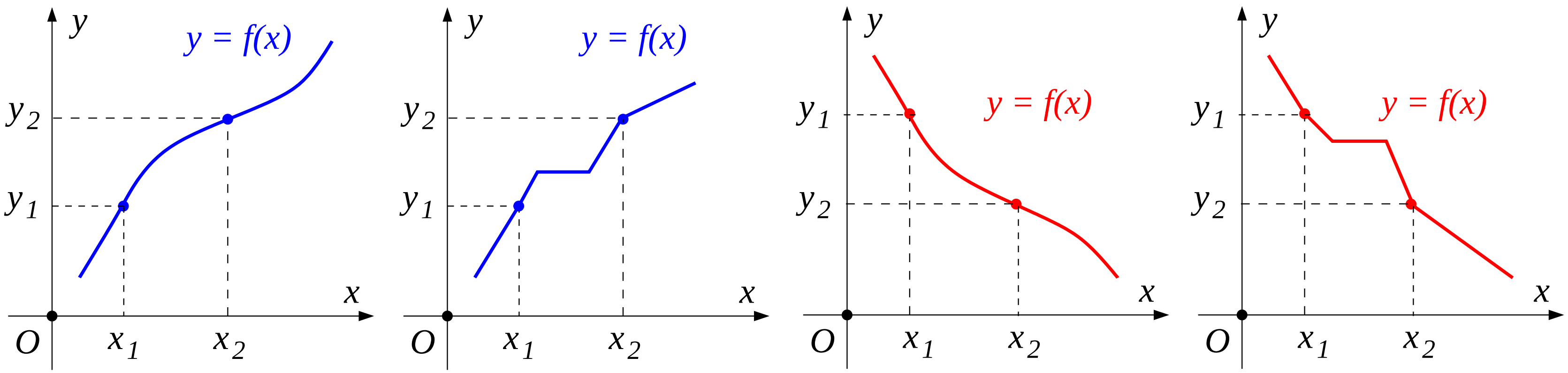
Soluzione: il denominatore deve essere diverso da zero, cioè $x \neq 2$ e $x \neq -2$.
L' argomento della radice quadrata deve essere non negativo, cioè $9 - x^2 \geq 0$ e quindi $-3 \leq x \leq 3$ Dunque il campo di esistenza è $-3 \leq x \leq 3$ con $x \neq 2$ e $x \neq -2$.

Con altre notazioni: $[-3,-2) \cup (-2,2) \cup (2,3]$

Funzioni Monotone

Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice

- strettamente crescente: $\forall x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2)$.
- debolmente crescente: $\forall x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \leq f(x_2)$.
- strettamente decrescente: $\forall x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2)$.
- debolmente decrescente: $\forall x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \geq f(x_2)$.



Esercizi sulle Funzioni Monotone

Esercizio 1. Dimostrare che la funzione $f(x) = 3\,x+1$ è strettamente crescente per $x \in \mathbb{R}$.

Soluzione: per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 < x_2$ si ha

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; 3\,x_1 < 3\,x_2 \;\Rightarrow\; 3\,x_1 + 1 < 3\,x_2 + 1 \quad \text{cioè } f(x_1) < f(x_2).$$

Ragionando in modo analogo, si dimostra che:

la funzione $f(x) = m\,x + q$ con $m > 0$ è strettamente crescente per $x \in \mathbb{R}$;

la funzione $f(x) = m\,x + q$ con $m < 0$ è strettamente decrescente per $x \in \mathbb{R}$.

Esercizi sulle Funzioni Monotone

Esercizio 2. Dimostrare che la funzione $f(x) = x^2$ è strettamente crescente per $x \geq 0$.

Soluzione: per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \geq 0$ con $x_1 < x_2$ abbiamo, in particolare, che

$$0 \leq x_1 < x_2.$$

Moltiplicando per x_1 (che è non negativo), si ottiene:

$$(x_1)^2 \leq x_1 x_2,$$

mentre moltiplicando per x_2 (che è strettamente positivo), si ottiene:

$$x_1 x_2 < (x_2)^2.$$

Ne segue che

$$(x_1)^2 \leq x_1 x_2 < (x_2)^2, \quad \text{cioè} \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Esercizio 3. Dimostrare che la funzione $f(x) = x^2$ è strettamente decrescente per $x \leq 0$.

Soluzione: per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \leq 0$ con $x_1 < x_2$ abbiamo, in particolare, che

$$x_1 < x_2 \leq 0.$$

Moltiplicando per x_1 (che è strettamente negativo), si ottiene:

$$(x_1)^2 > x_1 x_2,$$

mentre moltiplicando per x_2 (che è non positivo), si ottiene:

$$x_1 x_2 \geq (x_2)^2.$$

Ne segue che

$$(x_1)^2 > x_1 x_2 \geq (x_2)^2, \quad \text{cioè} \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Minimi Assoluti e Relativi di una Funzione

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in A$.

- minimo assoluto (o globale):

  x_0 è punto di minimo assoluto se $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x \in A$

- minimo relativo (o locale):

  si dice che in x_0 la funzione ha un punto di minimo relativo se "vicino" a x_0 assume solo valori *maggiori o uguali* di $f(x_0)$

  cioè

  x_0 è punto di minimo relativo se

  esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Massimi Assoluti e Relativi di una Funzione

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in A$.

- massimo assoluto (o globale):

  x_0 è punto di massimo assoluto se $f(x) \leq f(x_0)$ per ogni $x \in A$

- massimo relativo (o locale):

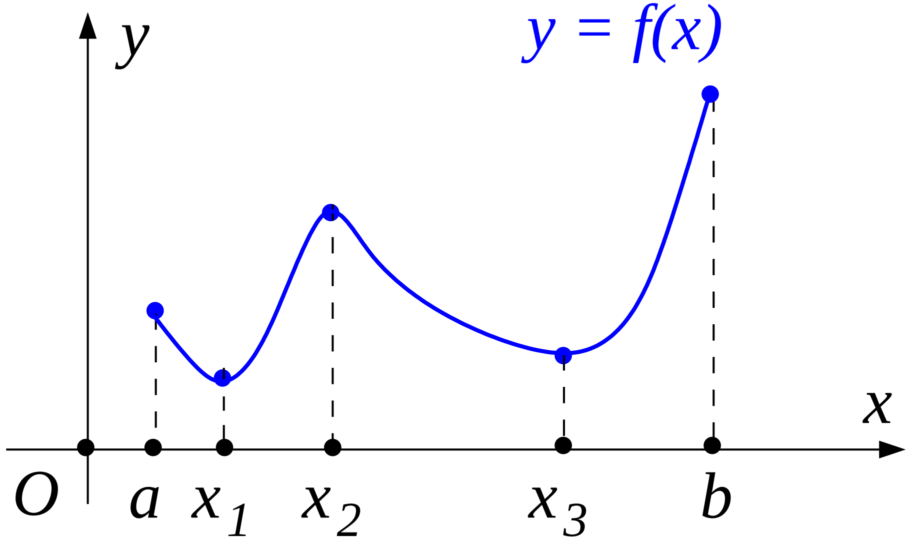
  si dice che in x_0 la funzione ha un punto di massimo relativo se "vicino" a x_0 assume solo valori *minori o uguali* di $f(x_0)$

  cioè

  x_0 è punto di massimo relativo se

  esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) \leq f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Minimi e Massimi di Funzione



- x_1 punto di minimo assoluto, $f(x_1)$ valore minimo assoluto;
- x_2 punto di massimo relativo, $f(x_2)$ valore massimo relativo;
- x_3 punto di minimo relativo, $f(x_3)$ valore minimo relativo;
- b punto di massimo assoluto, $f(b)$ valore massimo assoluto.

Esercizi su Massimi e Minimi

Esercizio 1. Trovare i punti di massimo, il valore massimo, i punti di minimo e il valore minimo della funzione $f(x) = 3\,x - 2$ nell'intervallo $[1, 2]$.

Soluzione: la funzione ha come grafico una retta il cui coefficiente angolare è positivo e dunque è strettamente crescente. Quindi il massimo si ottiene nel punto 2 e il valore del massimo è 4, mentre il minimo si ottiene nel punto 1 e il valore del minimo è 1.

Esercizio 2. Trovare i punti di massimo, il valore massimo, i punti di minimo e il valore minimo della funzione $f(x) = -x^2$ nell'intervallo $[0, 5]$.

Soluzione: la funzione in $[0, 5]$ è strettamente decrescente. Quindi il massimo si ottiene nel punto 0 e il valore del massimo è 0, mentre il minimo si ottiene nel punto 5 e il valore del minimo è -25.

Esercizio 3. Trovare i punti di massimo, il valore massimo, i punti di minimo e il valore minimo della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x < -1 \\ -x+2 & \text{per } -1 \leq x \leq 2 \\ 3 & \text{per } x > 2 \end{cases}$$

su $\mathbb{R}$.

Soluzione: il massimo è assunto nel punto -1 e per $x > 2$, il valore del massimo è 3. Il minimo si ottiene nel punto 2 e il valore del minimo è 0.

Esercizio 4. Dire se la funzione $f(x) = x^2 + 1$ ha massimo su tutto $\mathbb{R}$. Dire se la stessa funzione ha minimo su $\mathbb{R}$.

Soluzione: la funzione non ha massimo; il minimo è ottenuto nel punto 0 e il suo valore è 1.