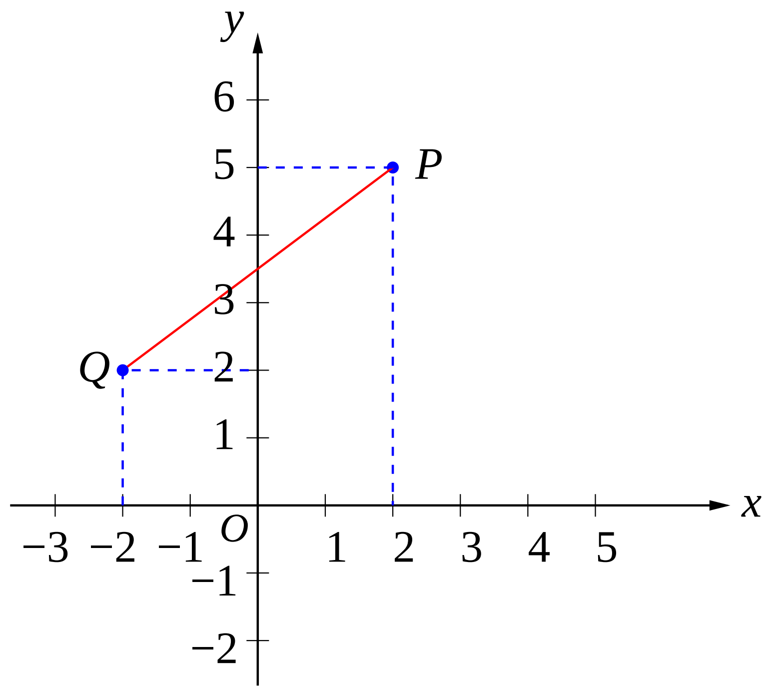
Coordinate Cartesiane nel Piano

$O = (0,0)$ origine degli assi

x ascissa, y ordinata

sistemi monometrici: stessa unità di misura sui due assi x, y

sistemi dimetrici: unità di misura diverse sui due assi *(spesso utile nelle applicazioni)*



La distanza tra due punti $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ è data da

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Se il sistema è monometrico, $d(P,Q)$ è la lunghezza del segmento PQ.

Rette

Nel piano cartesiano ogni equazione di primo grado

$$a\,x + b\,y + c = 0$$

con a e b non contemporaneamente nulli, rappresenta una retta e viceversa ogni retta può essere descritta con un'equazione di questo tipo.

Due equazioni con coefficienti a, b, c proporzionali rappresentano la medesima retta, ad esempio:

$$2\,x + y + 5 = 0 \quad \text{e} \quad 4\,x + 2\,y + 10 = 0$$

Casi particolari:

Se $a = 0$: $\quad b\,y + c = 0$ descrive una retta *orizzontale*.

Se $b = 0$: $\quad a\,x + c = 0$ descrive una retta *verticale*.

Rette

Se $b \neq 0$ l'equazione della retta può essere riscritta, risolvendo rispetto ad y:

$$y = mx + q \quad \text{dove} \quad m = -\frac{a}{b},\ q = -\frac{c}{b}$$

m si chiama coefficiente angolare e rappresenta la *pendenza*.

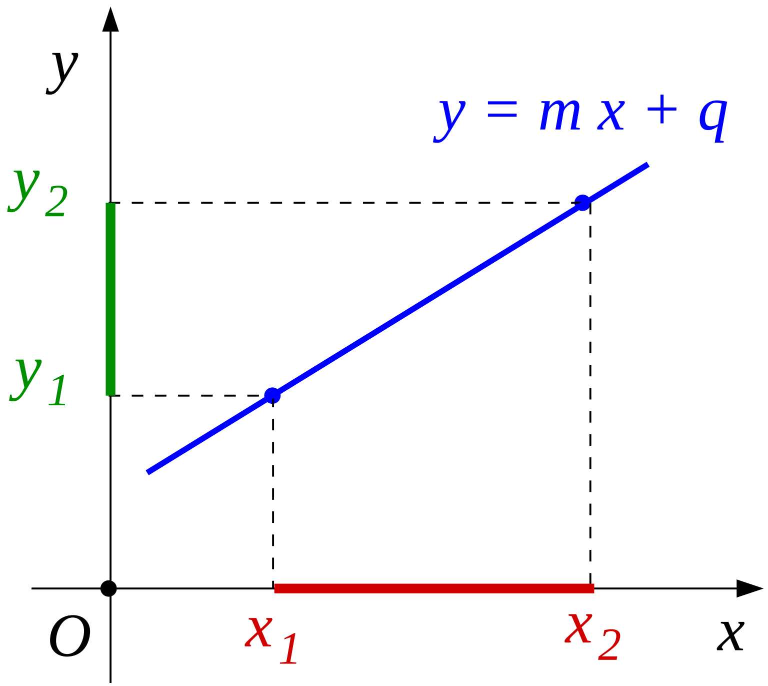
q si chiama intercetta e rappresenta l'ordinata del punto di intersezione con l'asse y.

Osservazioni:

- una retta (con $b \neq 0$) passa per l'origine se e solo se $q = 0$
- due rette di equazioni $y = mx + q$ e $y = m^*x + q^*$ sono *parallele* se e solo se $m^* = m$
- due rette di equazioni $y = mx + q$ e $y = m^*x + q^*$ sono *perpendicolari* se e solo se $m \cdot m^* = -1$

Rette

Il coefficiente angolare di una retta soddisfa la seguente relazione:



$$y_1 = mx_1 + q$$
$$y_2 = mx_2 + q$$

Sottraendo membro a membro:

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$
$$\Rightarrow \qquad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \forall x_1, x_2$$

Rette

Equazione di una retta passante per due punti: l'equazione della retta passante per due punti assegnati $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ può essere scritta

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad \text{oppure} \qquad y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

Attenzione: la prima formula vale solo se $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$; la seconda formula vale solo se $x_1 \neq x_2$

Rette – Esercizi

Esercizio 1. Scrivere l'equazione della retta passante per i punti $P = (5, -1)$ e $Q = (5, 2)$.

Soluzione: P e Q hanno la stessa ascissa 5. Retta verticale $x = 5$.

Esercizio 2. Scrivere l'equazione della retta passante per i punti $P = (3, 1)$ e $Q = (\sqrt{2}, 1)$.

Soluzione: P e Q hanno la stessa ordinata 1. Retta orizzontale $y = 1$.

Esercizio 3. Scrivere l'equazione della retta passante per $P = (0, 1)$ e $Q = (-1, 2)$.

Soluzione: $$\frac{y-1}{2-1} = \frac{x-0}{-1-0} \quad \Rightarrow \quad y = -x + 1$$

Rette – Esercizi

Esercizio 4. Scrivere l'equazione della retta passante per $P = (-1, 2)$ con coefficiente angolare $m = 2$.

Soluzione: $y = 2\,x + 4$

Esercizio 5. Scrivere l'equazione della retta che interseca l'asse delle ascisse in $x = 5$ e l'asse delle ordinate in $y = -1$.

Soluzione: $y = \dfrac{1}{5}\,x - 1$

Esercizio 6. Scrivere l'equazione della retta che interseca l'asse delle ordinate in $y = 5$, parallela alla retta $y = 3x - 7$.

Soluzione: $y = 3x + 5$.

Insiemi di Numeri

- $\mathbb{N} = \{0\,,\,1\,,\,2\,,\,3\,,\,\ldots\}$ insieme dei numeri naturali
- $\mathbb{Z} = \{\ldots\,,\,-3\,,\,-2\,,\,-1\,,\,0\,,\,1\,,\,2\,,\,\ldots\}$ insieme dei numeri interi
- $\mathbb{Q} = \left\{\frac{n}{m} :\ n, m \in \mathbb{Z},\ m \neq 0\right\}$ insieme dei numeri razionali
- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{numeri irrazionali}\}$ insieme dei numeri reali

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Esempi di numeri irrazionali:
$\sqrt{2}$, π, il numero di Nepero e, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ...

Sottoinsiemi di Numeri Reali

Intervalli limitati $\quad a, b \in \mathbb{R}$

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \leq b\}$ intervallo chiuso

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\}$ intervallo aperto

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x < b\}$ intervallo chiuso a sn e aperto a ds

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x \leq b\}$ intervallo chiuso a ds e aperto a sn

Intervalli illimitati $\quad a, b \in \mathbb{R}$

$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq a\} \qquad (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq b\}$

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \ x > a\} \qquad (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ x < b\}$

$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq 0\} \qquad \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

$\mathbb{R}_- = (-\infty, 0] = \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq 0\}$

Funzioni

Il concetto di funzione nasce da quello di corrispondenza fra grandezze. Tale corrispondenza può essere data in svariati modi:

- da un rilevamento empirico
- da una formula (*legge*)

Esempi:

(a) la temperatura in un certo luogo in un dato intervallo di tempo

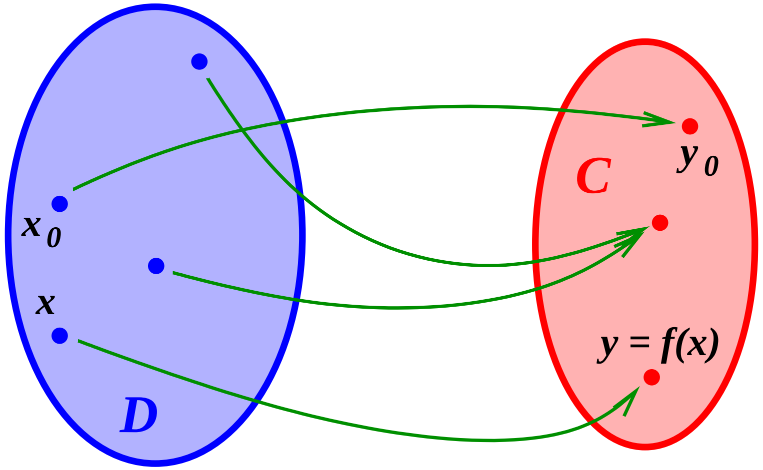
(b) la quotazione giornaliera del Dollaro in Euro in un dato periodo

(c) lo spazio percorso nel tempo da un corpo in caduta libera:
$s = \frac{1}{2} g\, t^2$ *(moto uniformemente accelerato)*

(d) la relazione tra i lati x, y di un rettangolo di area unitaria: $xy = 1$
da cui si ricava: $y = \frac{1}{x}$

Funzioni – Definizione

Una funzione f è una legge che ad ogni elemento x di un certo insieme D (dominio) fa corrispondere *uno ed un solo* elemento y di un secondo insieme C (codominio). Si dice che y è l'immagine di x tramite f e si scrive $y = f(x)$.



$$f : D \to C$$

$$f : x \mapsto y = f(x)$$

Funzioni – Esempi

Esempi di funzioni:

1. funzione costante: ogni funzione $f : D \to C$ tale che
$$f(x_1) = f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in D$$

2. funzione identità: $id_D : D \to D$ definita da
$$id_D(x) = x \quad \forall x \in D$$

3. successioni: funzioni definite su $\mathbb{N}$
$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
I valori si indicano con $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ anzichè $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(n)$, ...

Grafico di una Funzione

Sia $A \subset \mathbb{R}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale.

Il grafico di f è l'insieme delle coppie $(x, f(x))$.

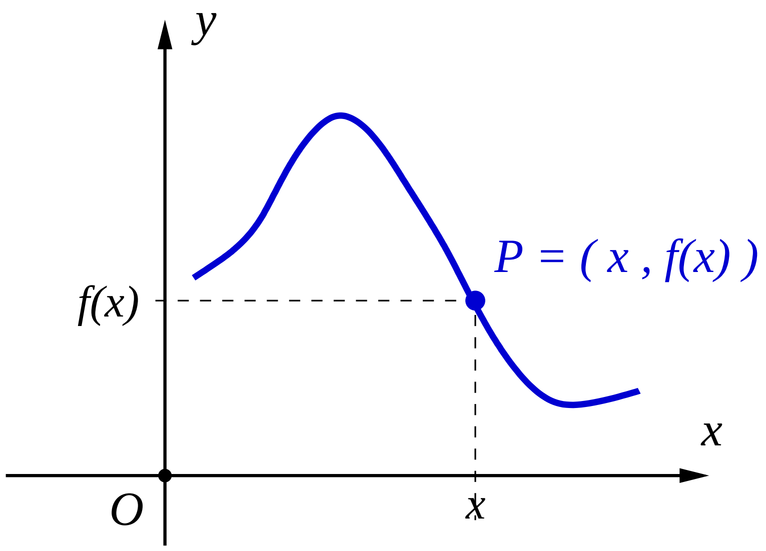


Grafico di f $= \{(x, y) : \; x \in A, \; y = f(x)\}$

Funzioni – Esempi

Esempi *(funzioni reali di una variabile reale)*:

- $f(x) = 2x + 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$ retta
- $f(x) = x^2 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$ parabola
- $f(x) = \sqrt{x} \quad \forall\, x \geq 0$
- $f(x) = \dfrac{1}{x} \quad \forall x \neq 0$ iperbole equilatera
- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq 0 \\ 1 & \text{per } x > 0 \end{cases}$

Si dice che $f(x)$ è il valore della funzione f in x.
Nell'espressione $y = f(x)$, x è detta variabile *indipendente*, mentre y è detta variabile *dipendente*.

Funzioni Iniettive e Suriettive

- Una funzione $f : D \to C$ si dice iniettiva se elementi distinti di D hanno immagini distinte:

$$x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2)$$

o, equivalentemente:

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2$$

- Una funzione $f : D \to C$ si dice suriettiva se ogni elemento del *codominio* C è *immagine* di qualche elemento del *dominio*. In simboli:

$$\forall\ y \in C \quad \exists\ x \in D : \quad f(x) = y$$

- Una funzione $f : D \to C$ contemporaneamente iniettiva e suriettiva si dice biunivoca o biiettiva