Esercizi di Ricapitolazione (Probabilità) – CTF 2013/14

1. Si lancia un dado a sei facce per due volte di seguito. Calcolare le probabilità dei seguenti eventi:

- esce 6 entrambe le volte;
- esce un numero strettamente maggiore di 4 entrambe le volte;
- solo uno dei due lanci dà un numero strettamente maggiore di 4;
- il primo lancio dà un numero strettamente maggiore di 4;
- nessuno dei due lanci dà un numero strettamente maggiore di 4;
- almeno uno dei due lanci dà un numero strettamente maggiore di 4.

Soluzione: $\frac{1}{36}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{5}{9}$.

2. Una moneta viene lanciata tre volte di seguito. Determinare la probabilità dei seguenti eventi:

- $E_1 = \{\text{al primo lancio esce croce}\}$;
- $E_2 = \{\text{al secondo lancio esce testa}\}$;
- $E_3 = E_1 \cup E_2$;
- $E_4 = E_1 \cap E_2$;
- $E_5 = \{\text{nei tre lanci esce una sola croce}\}$;
- $E_6 = \{\text{nei tre lanci esce almeno una croce}\}$.

Discutere se gli eventi E_1 e E_2 sono incompatibili o indipendenti. Discutere se gli eventi E_5 e E_6 sono incompatibili o indipendenti.

Soluzione: $p(E_1) = \frac{1}{2}$; $p(E_2) = \frac{1}{2}$; $p(E_3) = \frac{3}{4}$; $p(E_4) = \frac{1}{4}$; $p(E_5) = \frac{3}{8}$; $p(E_6) = \frac{7}{8}$. Gli eventi E_1 e E_2 sono indipendenti e non sono incompatibili. Gli eventi E_5 e E_6 non sono indipendenti e non sono incompatibili.

3. I semi di una pianta a fiore rosso germinano nel 60% dei casi, quelli della variante a fiore bianco nel 90% dei casi. In una scatola ci sono 40 semi della varietà a fiore rosso e 80 della varietà a fiore bianco. Prendendo un seme a caso, con quale probabilità esso germina? Può essere utile rappresentare il problema con un grafo ad albero.

Soluzione: la probabilità è $4/5$, cioè 80%.

4. Una piantagione di mais tradizionale e transgenico viene trattata con un erbicida. L'erbicida uccide il 70% delle piante di mais tradizionali e il 30% delle piante della varietà transgenica. Quale deve essere la frazione di piante transgeniche sul totale per essere certi che dopo il trattamento con l'erbicida sopravviva almeno il 55% delle piante? Può essere utile rappresentare il problema con un grafo ad albero.

Soluzione: la frazione di piante transgeniche sul totale deve essere $5/8$, cioè, 62.5%.

5. In una popolazione il 15% degli individui sono fumatori abituali. Il tasso di incidenza di una certa malattia è del 20% fra i fumatori abituali e dello 0.6% fra i non fumatori. Calcolare:

- la prevalenza della malattia sull'intera popolazione;
- la probabilità che un individuo malato sia un fumatore abituale;
- la probabilità che un individuo sano sia un fumatore abituale.

Soluzione: consideriamo gli eventi $A = \{\text{essere fumatore abituale}\}$ e $B = \{\text{essere malato}\}$. Sappiamo che $p(A) = \frac{15}{100}$, $p(B|A) = \frac{20}{100}$ e $p(B|A^c) = \frac{6}{1000}$. La prevalenza della malattia è:

$$p(B) = p(B|A) \cdot p(A) + p(B|A^c) \cdot p(A^c) = \frac{20}{100} \cdot \frac{15}{100} + \frac{6}{1000} \cdot \frac{85}{100} = 0.0351,$$

cioè il 3.51%. Per la formula di Bayes la probabilità che un individuo malato sia un fumatore abituale è data da

$$p(A|B) = \frac{p(B|A) \cdot p(A)}{p(B)} = \frac{\frac{20}{100} \cdot \frac{15}{100}}{0.0351} \simeq 0.855,$$

cioè, circa l'85% dei malati sono fumatori abituali. Infine, la probabilità che un individuo sano sia un fumatore abituale è data da

$$p(A|B^c) = \frac{p(B^c|A) \cdot p(A)}{p(B^c)} = \frac{\frac{80}{100} \cdot \frac{15}{100}}{1 - 0.0351} \simeq 0.124.$$

6. Un test diagnostico per una certa malattia ha sensibilità pari al 95% e specificità pari al 90%. Calcolare i valori predittivi per una prevalenza della malattia dell'1%.

Soluzione: il valore predittivo positivo è $\frac{95}{1085} \simeq 0.088$, mentre il valore predittivo negativo è $\frac{8910}{8915} \simeq 0.999$.

7. Viene effettuato un test diagnostico su una popolazione di 128 individui, di cui 86 malati e 42 sani. Sapendo che 72 malati sono risultati positivi al test e 30 individui sani sono risultati negativi al test, calcolare prevalenza della malattia, sensibilità, specificità e valori predittivi del test.

Soluzione: la prevalenza è $\frac{86}{128}$. La sensibilità è $\frac{72}{86}$, la specificità è $\frac{30}{42}$. Da questi dati si ricavano un valore predittivo positivo pari a circa 0.85 e un valore predittivo negativo pari a circa 0.69.

8. Un test diagnostico per una certa malattia ha una sensibilità del 90% e una specificità del 95%. Calcolare il valore predittivo positivo supponendo che la malattia abbia una prevalenza dell'0.5%. Quale sarebbe invece la prevalenza della malattia se la probabilità che un individuo scelto a caso nella popolazione risulti positivo al test fosse del 20%?

Soluzione: circa 8.29%; circa 17.26%