Esercizi di Ricapitolazione – CTF 2013/14

1. Sono dati 150 g di una soluzione $\mathcal{S}_1$ concentrata al 12%.
    - Determinare quanti grammi di soluto occorre aggiungere a $\mathcal{S}_1$ per ottenere una nuova soluzione $\mathcal{S}_2$ concentrata al 20%.
    - Determinare quanti grammi di solvente occorre aggiungere a $\mathcal{S}_2$ per riottenere una soluzione con la stessa concentrazione iniziale.

2. Si dispone di una soluzione $\mathcal{S}_1$ concentrata al 20% e di una soluzione $\mathcal{S}_2$ (dello stesso soluto nello stesso solvente) concentrata al 10%.
    - Trovare la concentrazione di una soluzione $\mathcal{S}_3$ composta dal 15% di $\mathcal{S}_1$ e dall'85% di $\mathcal{S}_2$.
    - Trovare il peso iniziale di $\mathcal{S}_1$ sapendo che, se aggiungo 10 g di soluto, la concentrazione diventa del 40%.

3. Scegliendo le coordinate logaritmiche opportune (semilogaritmiche o doppiamente logaritmiche), calcolare i coefficienti angolari delle rette corrispondenti alle seguenti funzioni:
    - $y = \sqrt{\dfrac{6}{x^3}}$
    - $y = 4^{5x-2}$

4. In un grafico con scala semilogaritmica è rappresentata la retta di equazione $Y = -\log_{10} 4 + (\log_{10} 3)X$. Trovare il corrispondente legame funzionale tra x e y, dove $X = x$ e $Y = \log_{10} y$.

5. In un grafico con scala doppiamente logaritmica è rappresentata la retta di equazione $Y = \log_{10} 5 + 2X$. Trovare il corrispondente legame funzionale tra x e y, dove $X = \log_{10} x$ e $Y = \log_{10} y$.

6. Date le funzioni $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = \ln|x|$,
    - scrivere l'espressione di $f \circ g$ e determinare il suo insieme di definizione;
    - scrivere l'espressione di $g \circ f$ e determinare il suo insieme di definizione;
    - scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $f \circ g$ in $x = 3$.

7. Si consideri la funzione

$$f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^x.$$

    - Determinare il campo di esistenza di f e il comportamento agli estremi del dominio.

- Studiare la monotonia di f.
- Determinare ascissa e ordinata dei punti di massimo e minimo assoluti di f nell'intervallo $[0, 3]$ (lasciare il numero e indicato, cioè non approssimarlo con un numero razionale).

8. Si consideri la funzione
$$f(x) = e^{x^3-6x^2+9x+1}$$
   - Dopo aver determinato il campo di esistenza di f, studiare il comportamento delle funzione agli estremi del suo dominio di definizione.
   - Studiare la monotonia di f.
   - Determinare massimo e minimo assoluti di f nell'intervallo $[0, 2]$.

9. Si consideri la funzione
$$f(x) = \begin{cases} e^{2+k-x} & \text{se } -1 \leq x \leq 1, \\ x^2 + 2 & \text{se } 1 < x \leq 3. \end{cases}$$
   - Determinare per quale valore di k la funzione f è continua nel punto $x = 1$.
   - Per tale valore di k la funzione f è derivabile nel punto $x = 1$?
   - Per il valore di k per cui la funzione è continua, trovare i punti di massimo e minimo assoluti di f nell'intervallo $[-1, 3]$, specificandone l'ascissa e l'ordinata.

10. Una popolazione cellulare è formata all'istante $t = 0$ da K_0 cellule aventi tempo di raddoppio $T = 5$ giorni. Dopo quanti giorni la popolazione risulterà quadruplicata?

    Soluzione: 10 giorni

11. Qual è il tempo di raddoppio di una seconda popolazione che aumenta di 3 volte il numero di individui in 10 giorni?

    Soluzione: $T = \dfrac{10}{\log_2 3}$ giorni

12. Un materiale radioattivo è caratterizzato da un tempo di dimezzamento pari a 500 anni. Dopo quanto tempo un campione di tale materiale si sarà ridotto del 75%?
    Soluzione: 1000 anni

13. Qual è il tempo di dimezzamento di un secondo campione che si riduce del 25% in 1000 anni?
    Soluzione: $T = \dfrac{1000}{\log_2(\frac{4}{3})}$ anni

14. La durata media in ore di un insieme di componenti elettronici è stata calcolata e riportata nella seguente tabella (si suppone che i dati siano distribuiti uniformemente all'interno di ciascuna classe):

classe	f_i
$600-700$	15
$700-800$	30
$800-900$	50
$900-1000$	5
	100

Calcolare la media. Usando l'istogramma delle frequenze o l'ogiva di frequenza, calcolare la mediana.

Soluzione: media$= 795$, mediana$= 810$

15. Sapendo che una certa famiglia di dati segue una distribuzione gaussiana di media $\mu = 8$ e deviazione standard $\sigma = 5$, determinare:

- la percentuale di dati che cadono fuori dall'intervallo $[-2, 18]$;
- la percentuale di dati che cadono nell'intervallo $[3, 18]$;
- la percentuale di dati maggiori di 10.

Usare la tabella gaussiana allegata (ce n'è una copia sulla pagina web del corso).

valori di u	Nell'intervallo $[\mu - u\sigma, \mu + u\sigma]$	Fuori dell'intervallo $[\mu - u\sigma, \mu + u\sigma]$	Nell'intervallo $[\mu + u\sigma, +\infty)$
0	0	1	$0,5$
$0,2$	$0,1586$	$0,8414$	$0,4207$
$0,4$	$0,3108$	$0,6892$	$0,3446$
$0,6$	$0,4514$	$0,5486$	$0,2743$
$0,8$	$0,5762$	$0,4238$	$0,2119$
1	$0,6826$	$0,3174$	$0,1587$
$1,2$	$0,7698$	$0,2302$	$0,1151$
$1,4$	$0,8384$	$0,1616$	$0,0808$
$1,6$	$0,8904$	$0,1096$	$0,0548$
$1,8$	$0,9282$	$0,0718$	$0,0359$
2	$0,9544$	$0,0456$	$0,0228$
$2,2$	$0,9722$	$0,0278$	$0,0139$
$2,4$	$0,9836$	$0,0164$	$0,0082$
$2,6$	$0,9906$	$0,0094$	$0,0047$
$2,8$	$0,9950$	$0,0050$	$0,0025$
3	$0,9974$	$0,0026$	$0,0013$
$3,2$	$0,9986$	$0,0014$	$0,0007$

Soluzione: 4.56%, 81.85%, 34.46%

16. Si vuole stimare l'età media μ di una popolazione di pazienti affetti da una certa malattia. Su un campione casuale composto da 8100 pazienti affetti dalla malattia risulta un'età media $\bar{x} = 60$ anni e una deviazione standard campionaria $s = 10$ anni. Trovare gli intervalli di confidenza per l'età media μ al 95% e al 99%.

Come cambia la stima se gli stessi dati $\bar{x}$ e s sono ottenuti da un campione di 10000 pazienti?

Soluzione: al 95% $[\,59.79\,,\,60.21\,]$, al 99% $[\,59.72\,,\,60.28\,]$
con 1000 pazienti: al 95% $[\,59.8\,,\,60.2\,]$, al 99% $[\,59.74\,,\,60.26\,]$

17. Nella seguente tabella sono riportati, raggruppati in classi, i dati relativi al peso medio (espresso in Kg) di un campione di 100 individui appartenenti a una certa popolazione:

peso (Kg)	f_i
$45-55$	10
$55-65$	20
$65-75$	30
$75-85$	30
$85-95$	10
	100

- Calcolare il peso medio e la deviazione standard campionaria.
- Calcolare la mediana, usando l'istogramma delle frequenze o l'ogiva di frequenza.
- Costruire l'intervallo di confidenza al 95% del peso medio μ della popolazione.

Soluzione: peso medio $= 71\,\text{Kg}$, $s = 3.38\,\text{Kg}$, mediana $= 61.67\,\text{Kg}$
intervallo di confidenza $[\,70.34\,,\,71.66\,]$

18. Nella seguente tabella sono riportati, raggruppati in classi, i dati relativi all'altezza media (espressa in cm) di un campione di 100 individui appartenenti a una certa popolazione:

altezza (cm)	f_i
$155-165$	10
$165-175$	20
$175-185$	50
$185-195$	20
	100

- Calcolare la media e la deviazione standard campionaria.
- Calcolare la mediana, usando l'istogramma delle frequenze o l'ogiva di frequenza.
- Costruire l'intervallo di confidenza al 99% dell'altezza media μ della popolazione.

19. Si vuole sottoporre a verifica la seguente affermazione: il peso medio degli abitanti adulti di una certa nazione è $\mu = 72\,\mathrm{Kg}$. A questo scopo si considera un campione casuale di 100 individui, che vengono pesati. Si ottiene un peso medio campionario $\bar{x} = 73.8\,\mathrm{Kg}$ con deviazione standard campionaria $s = 8\,\mathrm{Kg}$. Dopo aver precisato se il test debba essere a una o due code, trarre le conclusioni se il livello di significatività è del 5%. Cosa cambia se il livello di significatività del test è dell'1%? E se il campione fosse stato composto da 400 individui?

    Soluzione: si tratta di un test a due code. L'ipotesi va rifiutata con livello di significatività del 5%, mentre non può essere rifiutata con livello di significatività dell'1%. Nel caso di un campione di 400 individui l'ipotesi va rifiutata con entrambi i livelli di significatività.

20. Si vuole sottoporre a verifica la seguente affermazione: il peso medio degli abitanti adulti di una certa nazione è inferiore a $68.5\,\mathrm{Kg}$. A questo scopo si considera un campione casuale di 100 individui, che vengono pesati. Si ottiene un peso medio campionario $\bar{x} = 69.2\,\mathrm{Kg}$ con deviazione standard campionaria $s = 3.5\,\mathrm{Kg}$. Dopo aver precisato se il test debba essere a una o due code, trarre le conclusioni se il livello di significatività è del 5%. Cosa cambia se il livello di significatività del test è dell'1%?

    Soluzione: si tratta di un test a una coda. L'ipotesi va rifiutata con livello di significatività del 5%, mentre non può essere rifiutata con livello di significatività dell'1%.