

Principio di induzione

- 1) Utilizzando il principio di induzione, dimostrare che

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

- 2) Utilizzando il principio di induzione, dimostrare che

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2 \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

Dopo aver notato che la formula sopra fornisce la somma dei primi n numeri dispari, ricavare la formula per la somma dei primi n numeri pari:

$$\sum_{k=1}^n (2k) = \dots$$

per $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

- 3) Utilizzando il principio di induzione, dimostrare che

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Numeri complessi

- 1) Sia $z = -2 + i$. Calcolare $|z|$, \bar{z} e $\frac{1}{z}$.
- 2) Siano $z_1 = -1 + i$ e $z_2 = -1 - i$. Calcolare $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$ e $z_1 \bar{z}_2$.
- 3) Siano $z_1 = -\frac{2}{5} + i\sqrt{2}$ e $z_2 = \frac{5}{2} - 2i$. Calcolare $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$ e $z_1 \bar{z}_2$.
- 4) Scrivere in forma algebrica il numero complesso

$$\frac{3-i}{4+5i}.$$

- 5) Scrivere in forma algebrica il numero complesso

$$\frac{5-2i}{1+2i}.$$

- 6) Siano z_1 e z_2 le due radici complesse dell'equazione

$$z^2 + 2z + 2 = 0.$$

Calcolare $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$ e $z_1 \bar{z}_2$.

- 7) Siano z_1 e z_2 le due radici complesse dell'equazione

$$z^2 + 2z + 6 = 0.$$

Calcolare $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$ e $z_1 \bar{z}_2$.

- 8) Determinare modulo e argomento del numero complesso

$$\frac{4i}{1 + \sqrt{3}i}.$$

- 9) Disegnare nel piano complesso i seguenti insiemi:

$$A = \left\{ z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C} : \rho = 2 \right\}, \quad B = \left\{ z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C} : \theta = \frac{\pi}{4} \right\},$$

$$C = \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 1 \text{ e } \operatorname{Im} z \geq -2 \right\},$$

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| = |z + i| \right\}, \quad E = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| \leq 2 \right\}.$$

- 10) Disegnare nel piano complesso i seguenti insiemi:

$$A = \left\{ z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C} : 2 \leq \rho \leq 3, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\},$$

$$B = \left\{ w \in \mathbb{C} : w = iz, z \in A \right\}.$$

- 11) Risolvere in \mathbb{C} l'equazione

$$\bar{z}^2 - 2z = 0.$$

(Osservare che non si tratta di un polinomio di secondo grado in z , a causa del termine \bar{z}^2 . Pertanto il teorema fondamentale dell'algebra non si applica a questa equazione e le soluzioni potrebbero essere più di due).

- 12) Risolvere in \mathbb{C} l'equazione

$$z^2 + iz = 0.$$

- 13) Calcolare le radici quarte di -1 e rappresentarle nel piano complesso.

- 14) Risolvere in \mathbb{C} l'equazione

$$z^3 = 8 + 8i.$$

- 15) Risolvere in \mathbb{C} l'equazione

$$(z - 1)^5 = 2i.$$