Modellistica Numerica

Università di Pavia

12 febbraio 2019 — ore 10:00 — aula E10

Punti totali: 33 Durata dell'esame: 2 ore.

Problema 1. Confronto tra metodi numerici [7 punti]

Dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $f, q \in C^0([-1,1])$, il problema al bordo di Dirichlet

$$-u'' + qu = f \quad \text{in } (-1,1), \qquad u(-1) = \alpha, \quad u(1) = \beta$$

può essere approssimato con diversi metodi numerici, ad esempio (i) quello delle differenze finite, (ii) il metodo di collocazione spettrale polinomiale e (iii) il metodo degli elementi finiti lineari. Tutti questi metodi richiedono la soluzione di un sistema lineare di equazioni $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\vec{\mathbf{U}} = \vec{\mathbf{b}}$. Elencare:

(a) un vantaggio del metodo delle differenze finite rispetto a quello di collocazione spettrale;

(b) un vantaggio del metodo di collocazione spettrale rispetto a quello degli elementi finiti;

(c) un vantaggio del metodo degli elementi finiti rispetto a quello delle differenze finite.

Per ciascuno dei tre metodi, cosa rappresenta la k-esima componente del vettore soluzione $\vec{\mathbf{U}}$?

Indicare almeno una situazione in cui la matrice $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ ottenuta è simmetrica e definita positiva. Attenzione: può essere necessario fare delle ipotesi sul problema al bordo.

Soluzione:

(a) Matrice sparsa, semplicità d'implementazione.

(b) Convergenza più veloce se la soluzione è liscia, non serve quadratura.

(c) Analisi teorica della convergenza più semplice e generale, si applica a problemi non regolari.

Nel metodo delle differenze finite U_k approssima il valore di u in un nodo. Nel metodo di collocazione e in quello degli elementi finiti la soluzione discreta è combinazione delle funzioni di base $u_h = \sum_k U_k \varphi_k$ quindi U_k è il contributo della k-sima funzione di base alla soluzione. Nel caso degli elementi finiti lineari, U_k è anche il valore nei nodi della soluzione discreta.

Differenze finite ed elementi finiti danno matrici simmetriche; se $q \geq 0$ sono anche definite positive.

Problema 2. Metodo upwind [20 punti]

Consideriamo il seguente problema di trasporto–diffusione:

$$-u'' + pu' = f \quad \text{in } (0,1), \qquad u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta, \tag{1}$$

con $p, f \in C^0([0,1])$ e $p \geq 0$. Fissiamo i nodi $x_j = jh$ per $h = \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ e $j = 1, \dots, n$.

(a) Scrivere il metodo delle differenze finite <u>upwind</u> sui nodi x_j per il problema (1). (Ricordare che $p \geq 0$.)

(b) Scrivere il metodo in forma matriciale $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\vec{\mathbf{U}} = \vec{\mathbf{b}}$.

(c) Dimostrare il seguente principio del massimo discreto "pesato".

Dati $n \in \mathbb{N}$, $V_0, \dots, V_{n+1} \in \mathbb{R}$, $a_1, \dots, a_n > 0$, $c_1, \dots, c_n > 0$:

$$-a_j V_{j+1} + (a_j + c_j)V_j - c_j V_{j-1} \leq 0 \quad \text{per } 1 \leq j \leq n, \quad V_0 \leq 0, \quad V_{n+1} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad V_j \leq 0 \quad \text{per } 1 \leq j \leq n.$$

Suggerimento: adattare la dimostrazione del principio del massimo discreto, usando medie pesate.

(d) Dare la definizione di matrice monotona.

(e) Dimostare che la matrice $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ del metodo upwind è monotona.

Suggerimento: usare il principio del massimo discreto pesato.

(f) La matrice $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ è a predominanza diagonale? A predominanza diagonale stretta?

(g) Mostrare che il metodo upwind può essere scritto come un metodo alle differenze finite <u>centrate</u> per un opportuna "viscosità numerica".

(h) Verificare che il numero di Péclet locale Pe_h del metodo alle differenze centrate ottenuto è minore di 1.

(i) Se p ed f sono liscie, qual è l'ordine di convergenza in h atteso per il metodo upwind?

Soluzione: (a) Nel metodo upwind l'equazione differenziale viene approssimata dalle differenze finite centrate per il termine di secondo grado e da quelle all'indietro per il termine di primo grado, cioè $-D_h^{2C}u + pD_h^- u = f$ in ciascun nodo. Quindi il metodo consiste nel trovare $U_1, \dots, U_n \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{-U_{j-1} + 2U_j - U_{j+1}}{h^2} + p_j \frac{U_j - U_{j-1}}{h} = f_j, \qquad j = 1, \dots, n, \qquad U_0 = \alpha, \quad U_{n+1} = \beta,$$

dove $p_j := p(x_j)$ e $f_j := f(x_j)$.

(b)
$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2+p_1h & -1 & & & \\ -1-p_2h & 2+p_2h & -1 & & \\ & -1-p_3h & 2+p_3h & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -1-p_nh & 2+p_nh \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} f_1 + \frac{\alpha}{h^2} + \frac{p_1\alpha}{h} \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_n + \frac{\beta}{h^2} \end{pmatrix}.$$

(c) Denotiamo $j^* \in \{0, \dots, n+1\}$ l'indice tale che $V_{j^*} = \max\{V_0, \dots, V_{n+1}\}$. Assumiamo per assurdo che $V_{j^*} > 0$, quindi in particolare $1 \leq j^* \leq n$ (cioè j^* non è né 0 né $n+1$). Manipolando la disuguaglianza otteniamo una media pesata, quindi abbiamo

$$0 < V_{j^*} \leq \frac{a_{j^*}V_{j^*+1} + c_{j^*}V_{j^*-1}}{a_{j^*} + c_{j^*}} \quad \Rightarrow \quad \text{vale (almeno) una delle due: } \begin{array}{l} V_{j^*} \leq V_{j^*-1} \text{ oppure} \\ V_{j^*} \leq V_{j^*+1}. \end{array}$$

Assumiamo senza perdita di generalità che $V_{j^*} \leq V_{j^*-1}$; per la definizione di j^* abbiamo $V_{j^*} = V_{j^*-1}$. Considerando la disuguaglianza per $j = j^* - 1$ otteniamo

$$-a_{j^*-1}V_{j^*} + (a_{j^*-1} + c_{j^*-1})V_{j^*-1} - c_{j^*-1}V_{j^*-2} \leq 0 \quad \stackrel{V_{j^*}=V_{j^*-1}}{\Longrightarrow} \quad V_{j^*-1} \leq V_{j^*-2} \quad \Rightarrow \quad V_{j^*-2} = V_{j^*-1} = V_{j^*}.$$

Ripetendo ancora l'operazione e procedendo verso l'estremo sinistro dell'intervallo troviamo $V_0 = V_1 = V_2 = \ldots = V_{j^*} > 0$ che è una contraddizione.

(d) Una matrice quadrata $\underline{\underline{\mathbf{M}}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è detta matrice monotona se $\underline{\underline{\mathbf{M}}}\vec{\mathbf{v}} \preceq \vec{\mathbf{0}} \Rightarrow \mathbf{v} \preceq \vec{\mathbf{0}}$.

(e) Se $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\vec{\mathbf{v}} \preceq \vec{\mathbf{0}}$ allora $-v_{j+1} + (2 + p_jh)v_j - (1 + p_jh)v_j \leq 0$ per $j = 1, \dots, n$, denotando $v_0 = v_{n+1} = 0$. Scegliendo $a_j = 1$, $c_j = (1 + p_jh)$ siamo nella situazione del principio del massimo pesato del punto precedente, quindi $\vec{\mathbf{v}} \preceq \vec{\mathbf{0}}$ e segue che la matrice è monotona.

(f) La matrice è a predominanza diagonale ma non stretta. Infatti $A_{j,j} = \frac{2}{h^2} + \frac{p_j}{h} = |A_{j,j-1}| + |A_{j,j+1}| = \sum_{k=1,\dots,n;\, k\neq j} |A_{j,k}|$ per $2 \leq j \leq n-1$ e $A_{1,1} > A_{1,2}$, $A_{n,n} > A_{n,n-1}$.

(g) La differenza all'indietro si espande come

$$D_h^- u(x_j) = \frac{u_j - u_{j-1}}{h} = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} - \frac{h}{2} \cdot \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} = D_h^C u(x_j) - \frac{h}{2} D_h^{2C} u(x_j).$$

Quindi il metodo upwind equivale a $-D_h^{2C} u + p_j D_h^- u = -(1 + \frac{hp_j}{2}) D_h^{2C} u + p_j D_h^C u = f_j$, cioè il metodo alle differenze centrate con viscosità numerica $\epsilon_h = 1 + \frac{hp_j}{2}$.

(h) $\mathrm{Pe}_h = \frac{h|p_j|}{2\epsilon_h} = \frac{hp_j}{2+hp_j} = \frac{1}{1+\frac{2}{hp_j}} < 1$.

(i) L'ordine di convergenza atteso è lineare, cioè $O(h)$.

Problema 3. Codice da completare: collocazione [6 punti]

Vogliamo approssimare la soluzione u del problema al bordo periodico

$$-u''(x) + (\cos^2 x)u(x) = \sin x \,\mathrm{e}^{\sin x} \qquad x \in (0, 2\pi), \qquad u(0) = u(2\pi), \quad u'(0) = u'(2\pi)$$

con il metodo di collocazione trigonometrica, usando come funzioni di base ψ_k e come nodi x_j

$$\psi_k(x) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-\frac{n}{2}-1)x}, \qquad x_j := \frac{2\pi}{n}(j-1), \qquad j, k = 1, \ldots, n,$$

dove $n \in \mathbb{N}$ è un numero pari.

Completare il seguente codice Matlab che approssima u e ne disegna il grafico.

```
n     = 20;
f_fun = @(x) sin(x).*exp(sin(x));
q_fun = @(x) [                    (1)                    ]

x     = 2*pi*(0:n-1)/n;          % Vettore riga
q_v   = q_fun(x);
A     = zeros(n,n);
for j = 1:n
    for k = 1:n
        A(j,k) = [                    (2)                    ]
    end
end
B = [                    (3)                    ]
U = A\B;

xplot = linspace(0,2*pi,500);     % Vettore riga
uplot = [                    (4)                    ]
plot(xplot, real(uplot));
```

SOLUZIONE: Una possibile soluzione è la seguente.

```
n     = 20;
f_fun = @(x) sin(x).*exp(sin(x));
q_fun = @(x) (cos(x)).^2;

x     = 2*pi*(0:n-1)/n;          % Vettore riga
q_v   = q_fun(x);
A     = zeros(n,n);
for j = 1:n
    for k = 1:n
        A(j,k) = ( (k-1-n/2)^2 + q_v(j) ) * exp(1i*(k-1-n/2)*x(j));
    end
end
B = f_fun(x');
U = A\B;

xplot = linspace(0,2*pi,500);     % Vettore riga
uplot = exp( 1i * xplot' * ( (0:n-1)-n/2 )  ) * U;
plot(xplot, real(uplot));
```